Danmarks Statistik
MODELGRUPPEN

Arbejdspapir
(U D K A S T)

Claus Færch-Jensen

30. september 2004

Kursregulering af statens obligationsgæld

Resumé:

Der opstilles en ligning for kursregulering af statens obligationsgæld ved hjælp af MacAulays varighedsmål. Ligning viser sig at give en god beskrivelse af de faktiske kursændringer.
KOMMENTARER VEDR. 1. UDKAST:
Papiret kan betragtes som baggrundstof.

43.WPD

Nøgleord:

1. Indledning

Der er tidligere blevet opstillet data for statsgælden til såvel nominel værdi som til kursværdi (se JAO 6. juni 2004). I dette papir undersøges, om vi ved hjælp af MacAulays varighedsmål kan finde en simpel ligning for kursregulering af statens obligationsgæld.

2. Teori

Vi betragter indledningsvis en obligation (eller en portefølje), hvis ydelse bliver betalt ultimo hver periode i lånets løbetid. Ydelsen består afdrag på gælden og rentebetalinger på restgælden.Ved en konstant diskonteringsrente kan vi beregne nutidsværdien af en obligationenss fremtidige ydelser, således:

$$NV = \sum_{t=1}^{T} Y_t \cdot (1+i)^{-t}, \tag{1}$$

idet i betegner diskonteringsrenten, og Y_t er ydelsen i periode t.

MacAulays mål for varigheden er defineret som den negative elasticitet af nutidsværdien med hensyn til rentefaktoren 1+ i. Denne elasticitet er givet ved:

$$\begin{aligned} V &\equiv -\frac{\partial NV}{\partial(1+i)} \cdot \left(\frac{1+i}{NV}\right) = -\sum_{t=1}^{T} Y_t \cdot (-t) \cdot (1+i)^{-t-1} \cdot \left(\frac{1+i}{NV}\right) \\ &= -\sum_{t=1}^{T} \frac{Y_t \cdot (-t) \cdot (1+i)^{-t}}{NV} = \sum_{t=1}^{T} \frac{Y_t \cdot t}{(1+i)^t \cdot NV}. \end{aligned} \tag{2}$$

Definér nu følgende størrelse:

$$w_t \equiv \frac{Y_t}{(1+i)^t \cdot NV}, \quad t = 1, \ldots, T. \tag{3}$$

Denne størrelse angiver, hvor meget ydelsen i de enkelte perioder udgør af den samlede nutidsværdi. Vi bemærker, at følgende gælder per definition (se ligning 1):

$$\sum_{t=1}^{T} w_t = 1. \tag{4}$$

MacAulays varighedsmål kan nu alternativt formuleres som:

$$V = \sum_{i=1}^{T} w_t \cdot t. \tag{5}$$

Ligningen udtrykker, at varigheden er et vægtet gennemsnit af løbetiden. Ud over at være et mål for følsomheden over for renteændringer kan varigheden således også tolkes som et mål for, hvor lang tid man skal vente på at modtage obligationens ydelser.

Det antages ofte, at kursværdien af en obligation eller en portefølje netop svarer til nutidsværdien af de fremtidige ydelser, hvilket kan begrundes med et simpelt arbitrageargument. Dette giver anledning til at definere den effektive rente, der er givet ved den konstante rente, der opfylder, at kursværdien netop svarer til nutidsværdi. Den effektive rente, i^e, er altså en løsning til følgende udtryk:

$$P_0 = \sum_{i=1}^{T} Y_t \cdot (1+i^e)^{-t}, \tag{6}$$

hvor P_0 er et udtryk for kursværdien til tidspunkt $t = 0$.

Følgende sammenhæng må gælde:

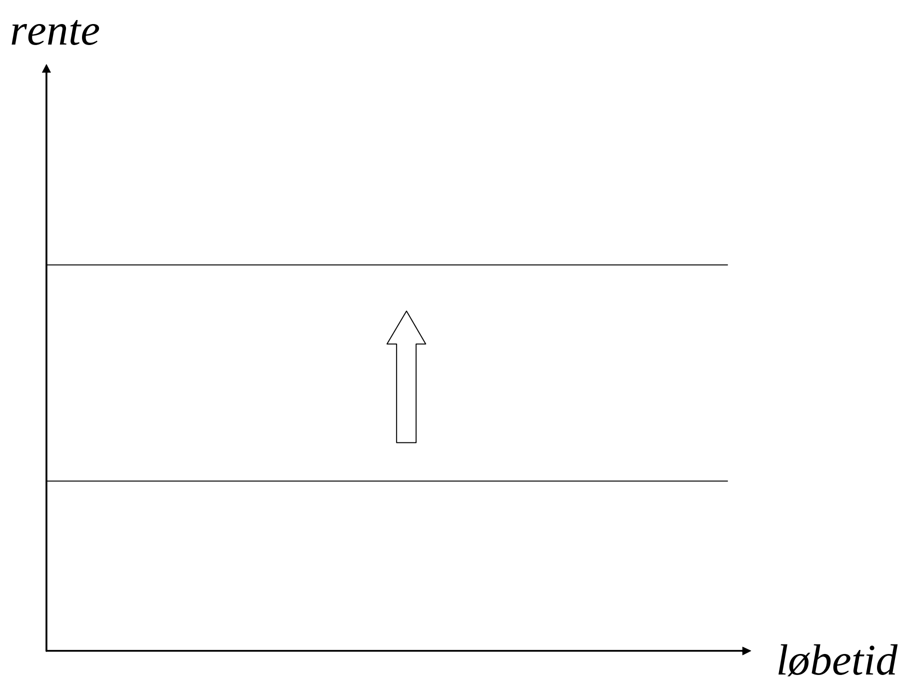
$$V = -\frac{\partial NV}{\partial(1+i)} \cdot \left(\frac{1+i}{NV}\right) = -\frac{\partial P_0}{\partial(1+i^e)} \cdot \left(\frac{1+i^e}{P_0}\right). \tag{7}$$

Vi kan derfor tolke varigheden som obligationskursens følsomhed over for ændringer i den effektive rente.

Det kan i øvrigt vises, at varigheden af en portefølje er lig med varigheden for de enkelte aktiver i porteføljen vægtet med de aktiver andel af den samlede kursværdi af porteføljen.

Et teoretisk problem ved MacAulays varighedsmål er, at man implicit forudsætter, at renten er den samme for forskellige løbetider, idet diskonteringsrenten er konstant. Renteændringer antages således at ske ved parallelforskydninger af rentekurven, der viser sammenhængen mellem rente og løbetider, hvilket er illiustreret i figur 1.

Figur 1. Rentekurve



Almindelig vis har obligationer med kort løbetid en lavere rente end lange obligationer, hvilket resulterer i en stigende rentekurve. Endvidere sker renteændringer ikke blot ved parallelforskydninger, men også ved ændret hældning eller krumning af kurven.

Vi vil nu undersøge, hvordan man kan anvende varigheden til at korrigere statens obligationsgæld til kursværdi. Den dynamiske identitet for statsgælden opgjort til kursværdi er, som følger:

$$\begin{aligned} obligationsgæld = {} & obligationsgæld_{-1} \\ & + bruttolånoptagelse \\ & - afdrag \\ & + kursregulering. \end{aligned}$$

Det bemærkes, at gælden er ultimodateret. Kursreguleringen angiver kursstigningen på den del af primogælden, der ikke afdrages.

Ved små renteændringer må følgende tilnærmelse gælde:

$$V_{-1} \approx -\left(\frac{\Delta P}{P_{-1}}\right) \cdot \left(\frac{1+i_{-1}^{e}}{\Delta(1+i^{e})}\right) \Rightarrow \frac{\Delta P}{P_{-1}} \approx -V_{-1} \cdot \left(\frac{1+i_{-1}^{e}}{\Delta i^{e}}\right) \qquad (8)$$

Vi når altså frem til følgende ligningen for kursregulering af den ikke-afdragne primogæld:

$$kursregulering = (obligationsgæld_{-1} - afdrag) \cdot (-V_{-1}) \cdot \left(\frac{1 + i^e_{-1}}{\Delta i^e} \right) \quad (9)$$

3. Data

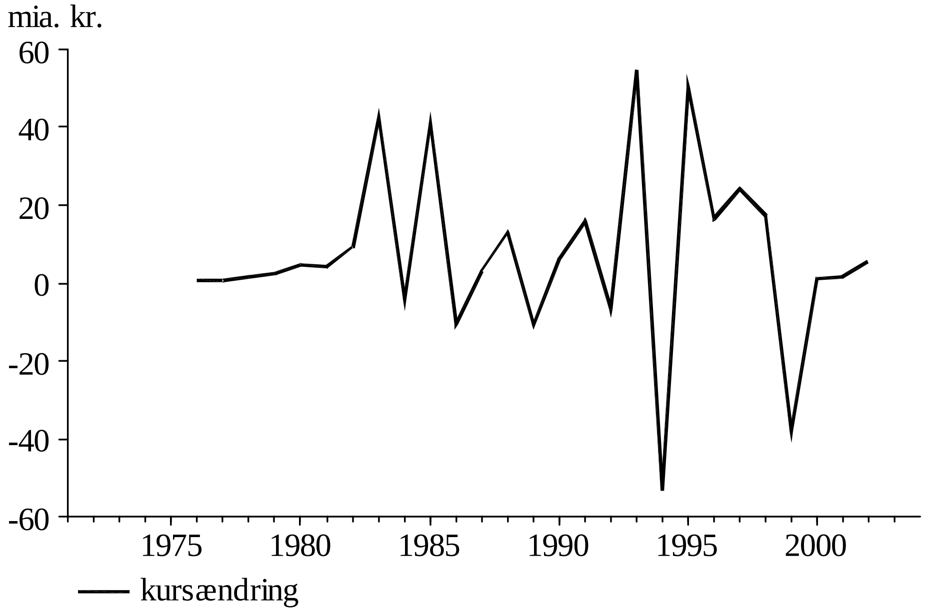
I dette afsnit undersøges data til vores ligning for kursregulering af stasgælden.

De årlige kursændringer i den ikke-afdragne primogæld er beregnet residualt således:

$$\begin{aligned} kursændring = &\Delta obligationsgæld \\ &- bruttolånoptagelse \\ &+ afdrag. \end{aligned} \quad (10)$$

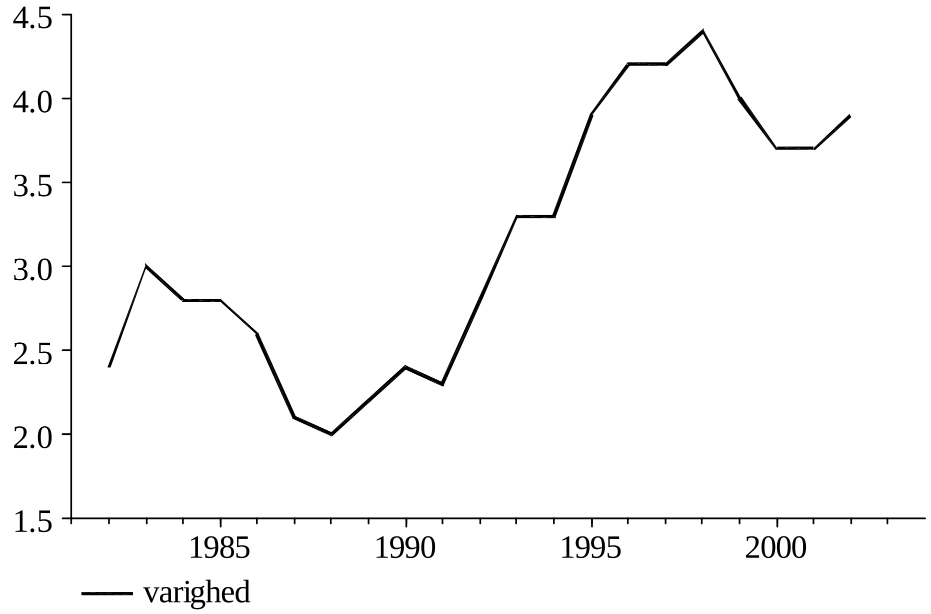
Kursændringer er afbildet i figur 2. Det ses, at der betydelige udsving i visse år.

Figur 2. Årlige kursændringer



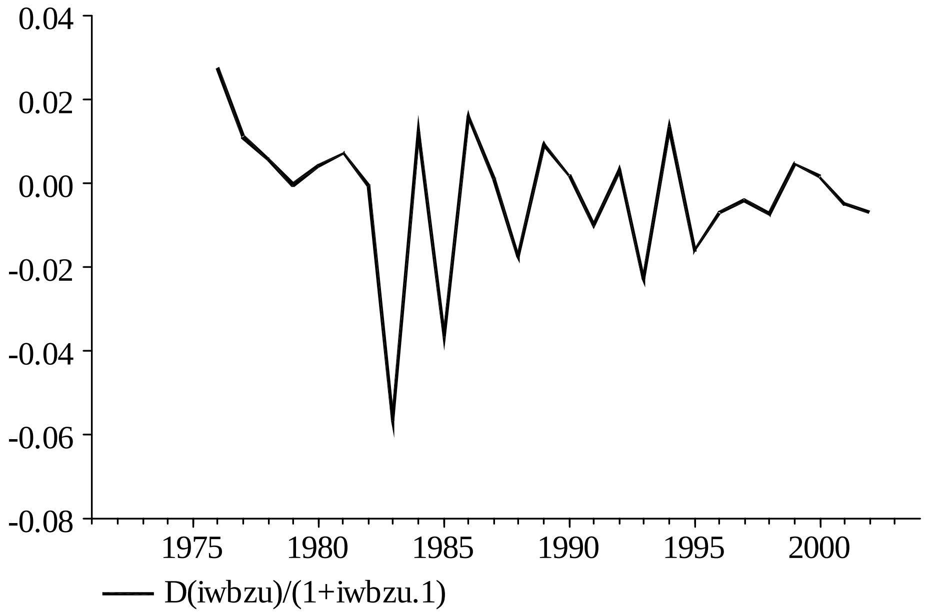
Nationalbanken har beregnet en MacAulay-varighed for statsgælden ultimo hvert år i perioden 1990-2003. Ved hjælp af ældre udgaver af publikationen *Statens låntagning og gæld* er det muligt at finde varigheden opgjort tilbage til 1983. Den samlede serie for varigheden er vist i figur 3. Det skal bemærkes, at der tilsyneladende er sket en definitionsændring af varighedsbegrebet i 1990, men det er ikke umiddelbart muligt at finde ud af, hvad bruddet skyldes. I den givne periode er varigheden for den samlede portefølje i øvrig udregnet ved sammenvejning af delporteføljer ved hjælp af de nominelle andele af den samlede gæld. For eftertiden vil Nationalbanken dog anvende kursværdierne til sammenvejning, hvilket rent teoretisk – som tidligere nævnt – er mest korrekt. Dette giver naturligvis endnu et databrud, men det vurderes, at problemet vil kunne klares med en simpel kædning.

Figur 3. Statsgældens varighed



Som effektiv rente bruges *iwbzu* fra ADAM's databank. Vi betragter her de relative ændringer i rentefaktoren 1 + iwbzu), idet det er denne størrelse, der skal anvendes i kursreguleringen. Udviklingen er vist i figur 4.

Figur 4. Relative ændringer i rentefaktoren



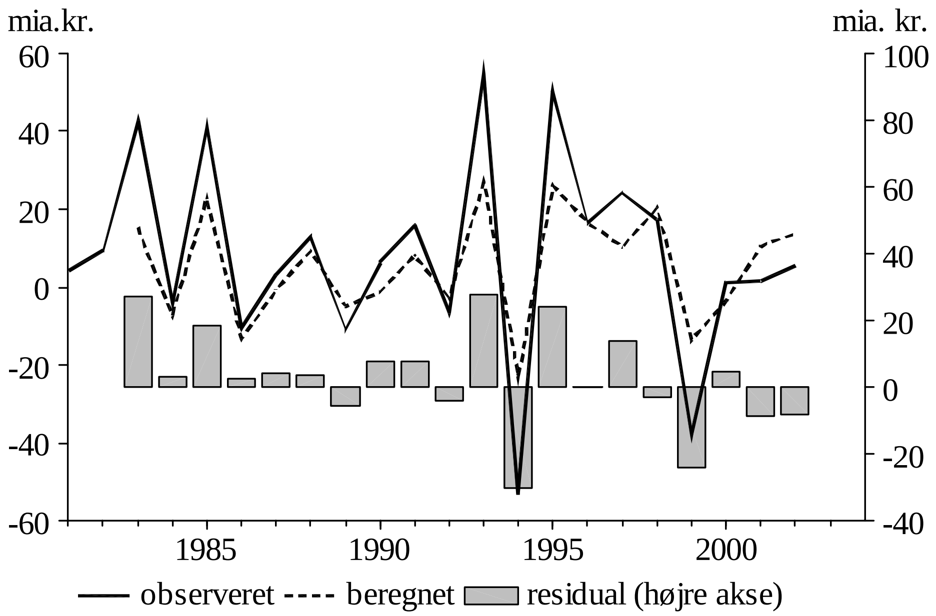
4. Ligningens forklaringsevne

I det følgende undersøges, om ligningen for kursregulering giver en god beskrivelse af de faktiske kursændringer i den ikke-afdragne primogæld. Ligningen gentages her:

$$kursregulering = (obligationsgæld_{-1} - afdrag) \cdot (-V_{-1}) \cdot \left(\frac{1 + i^{e}_{-1}}{\Delta i^{e}} \right) \tag{11}$$

Figur 5 viser forklaringsevnen for ovenstående relation.

Figur 5. Forklaringsevne



Det ses, at ligningen rammer bevægelser nogenlunde, men helt pæn forklaring har den nu ikke. Det er forsøgt at korrigere ved hjælp af ordinære korrektionsfaktorer, men disse viser for store udsving til at kunne anvendes. I stedet antages det, at kursændringerne kan beskrives således:

$$kursændring = \beta_0 + \beta_1 \cdot (obligationsgæld_{-1} - afdrag) \cdot (-V_{-1}) \cdot \left(\frac{1 + i_{-1}^e}{\Delta i^e} \right) + \varepsilon_t \quad (12)$$

hvor ε_t er tilfældig støj, og β'erne opfanger alle de faktorer, vi ikke kender. Det må indrømmes, at denne formuleringen er en smule ad-hoc, og at det nok er uhensigtsmæssigt at tolke for meget på den.

Ligning 12 er estimeret ved mindste kvadraters metode med følgende resultatet:

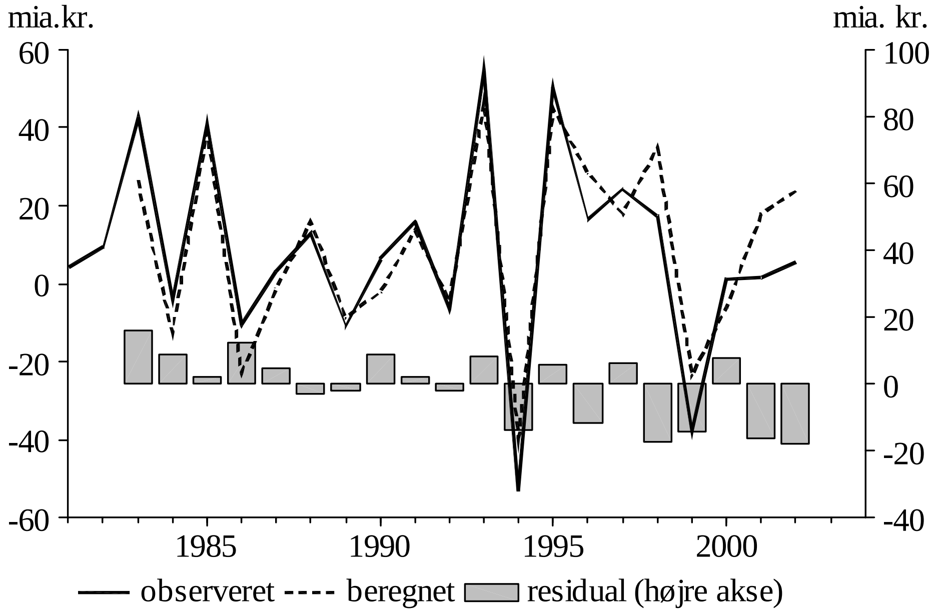
$$kursændring = \underset{(0,1634)}{1,72101} \cdot (obligationsgæld_{-1} - afdrag) \cdot (-V_{-1}) \cdot \left(\frac{1 + i_{-1}^e}{\Delta i^e} \right)$$

$R^2 = 0,8383$ s = 10,7892 DW = 1,6600

Den estimerede standardafvigelse på parameterestimatet er angivet i parantes. Det bemærkes, at der ikke indgår noget konstantled i relationen, hvilket skyldes, at konstantleddet har vist sig at være helt uden betydning.

Den korrigerede lignings forklaringsevne er vist herunder.

Figur 6. Forklaringsevne for korrigeret ligning



Det ses, at forklaringsevnen er meget pænere, og ligningen for kurregulering af statsgælden ser ud til at være brugbar. Man bør dog bemærke de større residualer i de seneste år.

Konklusion

I dette papir er det undersøgt, om det er muligt at lave en ligning for kursregulering af statens obligationsgæld ved hjælp af MacAulays varighedsmål. Det har vist sig, at man kan opnå et ganske god beskrivelse af de faktiske kursændringer.

Litteratur

Christensen, P. O. og B. G. Sørensen (1998): *Virksomhedens finansiering*, 2. udgave, Odense Universitetsforlag

Danmarks Nationalbank (2004): *Finansiel styring i Danmarks Nationalbank*

Danmarks Nationalbank (2003): *Statens låntagning og gæld*

Hedegaard, O. (1999): *Grundlæggende investeringsteori*, Jurist- og Økonomforbundets Forlag

Lando, D. og R. Poulsen (2002): *Lecture Notes for the course Investerings- og Finansieringsteori*

Larsen, H. O. (1995): *Prissætning af obligationer og andre finansielle aktiver, Undervisningsnoter nr. 52,* Økonomisk Institut, Københavns Universitet