

## Trendspecifikationer i et GLO-efterspørgselssystem

### Resumé:

*I papiret ses på tre forskellige trendspecifikationer i et GLO-efterspørgselssystem. Der ses på de analytiske forskelle, og i en konkret estimation er resultatet, at de forudsagte værdier med de tre forskellige specifikationer er stort set ens.*

---

DGR11601.WPD

Nøgleord: GLO, trend, effektivitetsindeks, priselastisiteter

*Modelgruppepapirer er interne arbejdsrapporter. De konklusioner, der drages i papirerne, er ikke endelige og kan være ændret inden opstillingen af nye modelversioner. Det henstilles derfor, at der kun citeres fra modelgruppepapirerne efter aftale med Danmarks Statistik.*

## 1. Indledning

Vi ser på forskellige specifikationer af tidseffekt i et efterspørgselssystem baseret på en generaliseret Leontief-omkostningsfunktion (GLO), dels den simple foreslået bl.a. i Diewert og Wales (1987), hvor efterspørgselsligningerne formuleret i faktorandele blot tilføjes en kvadratisk tidstrend (afsnit 2.1), dels metoden foreslået i Thomsen (1999), hvor priser og mængder effektivitets-korrigeres med et effektivitetsindeks, der fx formuleres som en kvadratisk tidstrend (afsnit 2.2), og endelig en hybrid mellem disse to (afsnit 2.3).

I det følgende er  $C(\cdot)$  en omkostningsfunktion,  $Y$  er produktionsværdi, der er  $N$  produktionsfaktorer,  $X_i$ , med priser  $p_i$ ,  $t$  er tiden (evt. normeret passende),  $e_i$  er et effektivitetsindeks, fx af formen  $e_i = \exp(\omega_{1i}t + \frac{1}{2}\omega_{2i}t^2)$ , og resten er parametre (græske bogstaver, når der regnes med effektivitetsindeks, og ellers almindelige).

I en log-lineær efterspørgselsligning og i en Translog-efterspørgselsligning formuleret i omkostningsandele indføres tidseffekter sædvanligvis ved at tilføje fx en kvadratisk tidstrend til efterspørgselsligningen,  $a_{1i}t + a_{2i}t^2$ . Vælges det i stedet at regne i effektivitetskorrigerede mængder og priser,  $\tilde{X}_i = X_i e_i$  og  $\tilde{p}_i = p_i / e_i$ , kan det vises, at dette blot er en entydig omparametrisering af efterspørgsels-funktionen, (sammenhængen i Translog-tilfældet er vist i KTH07d93).

Derfor virker det oplagt, at noget tilsvarende må gøre sig gældende med GLO-efterspørgselsligninger, hvilket vi undersøger i dette papir. Vores dybe interesse for dette problem skyldes til dels, at vi har haft estimationsproblemer med et GLO-system formuleret med effektivitetsindeks og derfor har et ønske om at kunne vælge en anden formulering af tidskorrekturen, der simplificerer efterspørgselsligningerne, samtidig med at egenskaberne ikke ændres.

I det teoretiske afsnit 2 gør vi rede for forskelle og ligheder mellem de forskellige metoder, og i afsnit 3 estimeres et GLO-efterspørgselssystem på Berndt&Wood-datasættet med de tre forskellige trendspecifikationer. Det viser sig, at det ikke er muligt at foreslå et analytisk udtryk for effektivitetsindekset, der muliggør en entydig omparametrisering mellem de sædvanlige GLO-trendparametre og parametrene i effektivitetsindekset; men omvendt viser estimationerne, at de forskellige formuleringer giver anledning til (stort set) samme numeriske resultater.

## 2. Forskellige trendspecifikationer

GLO-funktionen, der ligesom Translog er en såkaldt fleksibel funktionsform, er uden skala- eller tidseffekter er givet ved (1), jf. Diewert (1971).

$$C(p, Y) = Y \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N b_{ij} p_i^{\frac{1}{2}} p_j^{\frac{1}{2}} \quad (1)$$

Hvilket giver anledning til følgende efterspørgselsfunktioner (2) formuleret i faktorandele, hvor parametrene underlægges symmetrirestriktionerne  $b_{ji} = b_{ij}$ .

$$\frac{X_i}{Y} = \sum_{j=1}^N b_{ij} \left( \frac{p_j}{p_i} \right)^{\frac{1}{2}} = b_{ii} + \sum_{j \neq i} b_{ij} \left( \frac{p_j}{p_i} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2)$$

### 2.1. Trendspekifikation á la Diewert

I Diewert og Wales (1987) udvides GLO-funktionen med skala- og tidseffekter. I tilfældet med konstant skalaafkast, (hvilket vi antager i hele papiret), er efterspørgselsligningerne givet ved (3).<sup>1</sup>

$$\frac{X_i}{Y} = \sum_{j \neq i} b_{ij} \left( \frac{p_j}{p_i} \right)^{\frac{1}{2}} + b_{ii} + a_{1i}t + a_{2i}t^2 \quad (3)$$

Denne formulering af tidseffekter i GLO-funktionen er den mest anvendte i empiriske studier, og blev fx også benyttet i energifordelingssystemet i den første version af EMMA, jf. DSt et.al. (1997).

I Leontief specialtilfældet (dvs. ingen priseffekter) reduceres udtrykket til (4), dvs. konstante faktorandele pånær en kvadratisk trend. Det bør dog bemærkes, at denne formulering ikke sikrer, at faktorandelene er positive, hvilket vi vender tilbage til i afsnit 2.3.

$$\frac{X_i}{Y} = b_{ii} + a_{1i}t + a_{2i}t^2 \quad (4)$$

---

<sup>1</sup>Formel (17) i D&W med følgende ændringer: Konstant skalaafkast er pålagt ved at sætte  $b_i = b_i = b_{yy} = 0$ , vælge normeringen  $b_{ii} = 1$ , og kalde  $b_{ii} = a_{1i}$  og  $\gamma_i = a_{2i}$ .

## 2.2. Trendspekifikation á la Thomsen

I de "rå" GLO-efterspørgselsligninger (2) indsættes effektivitetskorrigerede mængder og priser, hvilket giver anledning til (5), (der ikke har megen lighed med (3)). Denne formulering benyttes fx i Thomsen (1999).

$$\frac{X_i}{Y} = \frac{1}{e_i} \sum_{j=1}^N \beta_{ij} \left( \frac{p_j}{e_j} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{e_i}{p_i} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{e_i} \beta_{ii} + \sum_{j \neq i} \beta_{ij} \left( \frac{p_j}{p_i} \right)^{\frac{1}{2}} (e_i e_j)^{-\frac{1}{2}} \quad (5)$$

I Leontief specialtilfældet reduceres dette til (6), der med et effektivitetsindeks af formen  $e_i = \exp(\omega_{1i}t + \frac{1}{2}\omega_{2i}t^2)$  sikrer positive faktorefterspørgsler, givet positive Leontiefparametrene,  $\beta_{ii} > 0$ .

$$\frac{X_i}{Y} = \frac{\beta_{ii}}{e_i} \quad (6)$$

Det har ikke været muligt at vælge en specifikation af effektivitetsindekset, således at der kan bestemmes en analytisk sammenhæng (omparametrisering) mellem de to sæt parametre, henholdsvis  $(b_{ij}, a_{1i}, a_{2i})$  og  $(\beta_{ij}, \omega_{1i}, \omega_{2i})$ . På den anden side forekommer det højst tænkeligt, at de to forskellige måder at korrigere for en kvadratisk tidseffekt (med samme antal parametre) numerisk set vil give anledning til samme faktorefterspørgsler; - dette undersøger vi derfor med et konkret eksempel i afsnit 3.

## 2.3. Et tredje forslag til trendspekifikation (hybrid)

Inspireret af, at D&W trendspekifikationen i Leontief specialtilfældet ikke sikrer positive faktorefterspørgsler, mens formuleringen i afsnit 2.2 gør det, foreslås her en alternativ formulering, hvor Leontief efterspørgselsfunktionerne udvides med et effektivitetsindeks, hvorefter der generaliseres til GLO-efterspørgselsligninger ved at medtage krydspriseffekter.

Vi tager udgangspunkt i (4), men formulerer i stedet (7), hvor tidseffekten (næsten) er som i (6). Givet at Leontief-parametrene  $b_{ii} > 0$ , sikrer denne formulering positive faktorefterspørgsler.

$$\frac{X_i}{Y} = b_{ii} + e_i, \text{ hvor } e_i = \exp(\alpha_{1i}t + \alpha_{2i}t^2) \quad (7)$$

Forskellen er blot, at her (og i (6)) er Leontief faktorandelene (udover en konstant) givet ved en eksponentiel kvadratisk trend,  $\exp(\alpha_{1i}t + \alpha_{2i}t^2)$ , mod i D&W en almindelig kvadratisk trend,  $a_{1i}t + a_{2i}t^2$ , men der er (alligevel) ikke en analytisk sammenhæng mellem de to sæt parametre.

Udvider vi nu (7) med krydspriseffekter, får vi (8), der kan opfattes som et kompromis mellem D&W formuleringen i (3) og TT formuleringen i (5).

$$\frac{X_i}{Y} = \sum_{j \neq i} b_{ij} \left( \frac{p_j}{p_i} \right)^{\frac{1}{2}} + b_{ii} + e_i \quad (8)$$

## 2.4. Opsamling

Både i D&W (afsnit 2.1) og hybrid-versionen (afsnit 2.3) kan efterspørgselsligningerne antages at stamme fra en omkostningsfunktion af formen (1), hvor tidseffekterne kommer ind via tidsvarierende Leontief parametre  $b_{ii} = b_{ii}(t)$  givet ved henholdsvis  $b_{ii}(t) = b_{ii} + a_{1i}t + a_{2i}t^2$  og  $b_{ij}(t) = b_{ij} + \exp(\alpha_{1i}t + \alpha_{2i}t^2)$ .

Metoden i afsnit 2.2 med effektivitetskorrigering kan vi ligeledes vælge at opfatte som (1), hvor alle GLO-parametrene er tidsvarierende, henholdsvis Leontief-parametrene,  $\beta_{ii}(t)$ , og "krydsparametrene",  $\beta_{ij}(t)$ , jf. (9).

$$\begin{aligned} \beta_{ii}(t) &= \beta_{ii} / e_i(t) = \beta_{ii} \cdot \exp\left(-\omega_{1i}t - \frac{1}{2}\omega_{2i}t^2\right) \\ \beta_{ij}(t) &= \beta_{ij} \cdot (e_i(t) \cdot e_j(t))^{-\frac{1}{2}} = \beta_{ij} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}(\omega_{1i} + \omega_{1j})t - \frac{1}{2}(\omega_{2i} + \omega_{2j})t^2\right) \end{aligned} \quad (9)$$

## 2.5. Priselasticiteter

Vi finder først udtrykkene for priselasticiteterne ud fra de generelle GLO-efterspørgselsligninger (2); hvorefter det er nemt at bestemme dem i de tre tilfælde af trendspekifikationer, se tabel 1, ved at opfatte GLO-parametrene som tidsafhængige, som beskrevet i afsnit 2.4. Egen- og krydspriselasticiteterne i et GLO-system er givet ved henholdsvis (10) og (11).

$$\begin{aligned} \xi_{ii} &= \frac{\partial X_i}{\partial p_i} \frac{p_i}{X_i} = \frac{p_i}{X_i} Y \left( -\frac{1}{2} p_i^{-3/2} \right) \sum_{j \neq i} b_{ij} p_j^{1/2} \\ &= \frac{-\frac{1}{2} Y \sum_{j \neq i} b_{ij} \left( \frac{p_j}{p_i} \right)^{1/2}}{Y \sum_{j=1}^N b_{ij} \left( \frac{p_j}{p_i} \right)^{1/2}} = \frac{-\frac{1}{2} \sum_{j \neq i} b_{ij} p_j^{1/2}}{\sum_{j=1}^N b_{ij} p_j^{1/2}} \\ &= \frac{-\frac{1}{2} \left( \sum_{j=1}^N b_{ij} p_j^{1/2} - b_{ii} p_i^{1/2} \right)}{\sum_{j=1}^N b_{ij} p_j^{1/2}} = \frac{1}{2} \left( \frac{b_{ii} p_i^{1/2}}{\sum_{j=1}^N b_{ij} p_j^{1/2}} - 1 \right) \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned}\xi_{ij} &= \frac{\partial X_i}{\partial p_j} \frac{p_j}{X_i} = \frac{p_j}{X_i} Y \frac{1}{2} b_{ij} p_i^{-1/2} p_j^{-1/2} \\ &= \frac{\frac{1}{2} Y b_{ij} \left(\frac{p_j}{p_i}\right)^{1/2}}{Y \sum_{k=1}^N b_{ik} \left(\frac{p_k}{p_i}\right)^{1/2}} = \frac{1}{2} \left( \frac{b_{ij} p_j^{1/2}}{\sum_{k=1}^N b_{ik} p_k^{1/2}} \right), \quad i \neq j\end{aligned}\quad (11)$$

I D&W og hybrid-versionen indsætter vi blot  $b_{ii}(t)$  i stedet for  $b_{ii}$ . I TT-versionen kan vi enten indsætte  $\beta_{ij}(t)$  i stedet for alle GLO-parametrene eller indsætte de effektivitetskorrigerede priser direkte. Derved får vi naturligvis de samme udtryk, som hvis vi havde udregnet priselasticiteterne direkte fra de respektive efterspørgselsligninger.

**Tabel 1. Priselasticiteter**

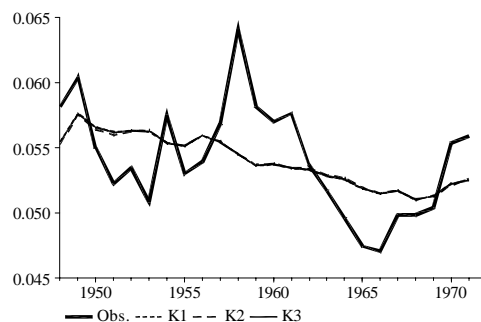
	D&W (2.1)	TT (2.2)	Hybrid (2.3)
$\xi_{ii}$	$\frac{1}{2} \left( \frac{(b_{ii} + \alpha_{1i} t + \alpha_{2i} t^2) p_i^{1/2}}{\sum_{j=1}^N b_{ij} p_j^{1/2}} - 1 \right)$	$\frac{1}{2} \left( \frac{\beta_{ii} p_i^{1/2} e_i^{-1/2}}{\sum_{j=1}^N \beta_{ij} p_j^{1/2} e_j^{-1/2}} - 1 \right)$	$\frac{1}{2} \left( \frac{(b_{ii} + \exp(\alpha_{1i} t + \alpha_{2i} t^2)) p_i^{1/2}}{\sum_{j=1}^N b_{ij} p_j^{1/2}} - 1 \right)$
$\xi_{ij}, j \neq i$	$\frac{1}{2} \left( \frac{b_{ij} p_j^{1/2}}{\sum_{k=1}^N b_{ik} p_k^{1/2}} \right)$	$\frac{1}{2} \left( \frac{\beta_{ij} p_j^{1/2} e_j^{-1/2}}{\sum_{k=1}^N \beta_{ik} p_k^{1/2} e_k^{-1/2}} \right)$	$\frac{1}{2} \left( \frac{b_{ij} p_j^{1/2}}{\sum_{k=1}^N b_{ik} p_k^{1/2}} \right)$

### 3. Estimationsresultater

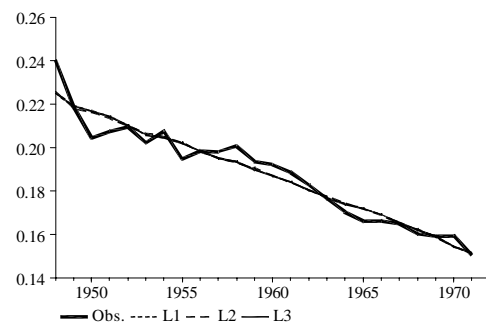
Vi estimerer et GLO-system for efterspørgslen efter kapital, arbejdskraft, energi og materialer med de tre forskellige specifikationer af tidskorrektion (trendspecifikationer) på Berndt&Wood-datasættet for perioden 1948-1971, som der også estimeres på i Thomsen (2000). Der estimeres kun langsigtrelationer.

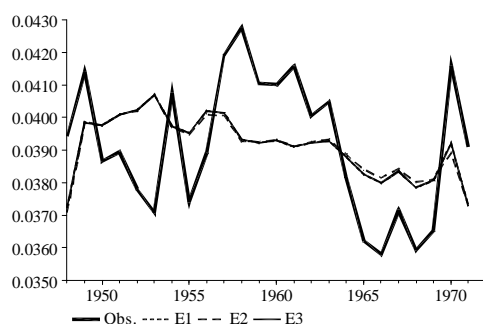
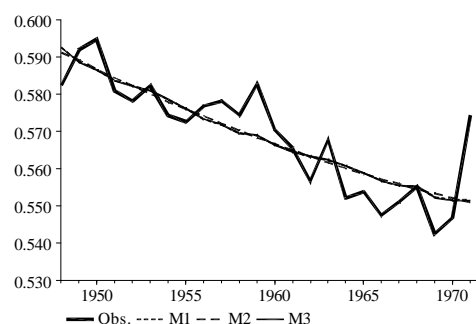
I figur 1-4 vises de faktiske værdier og de tre forudsagte værdier med henholdsvis trendspecifikationen i afsnit 2.1, 2.2 og 2.3, og vi ser, at de tre forskellige forudsagte værdier kliner sig op af hinanden for alle faktorerne.

**Figur 1. Kapital**



**Figur 2. Arbejdskraft**



**Figur 3. Energi****Figur 4. Materialer**

#### 4. Konklusion

Vi har set på tre forskellige trendspecifikationer i et GLO-efterspørgselssystem. Først så vi, at det rent analytisk ikke er muligt at bestemme entydige omparametriseringer mellem specifikationerne, (som det fx er tilfældet i et Translog-system). Derefter så vi i en konkret estimation, at de tre specifikationer giver anledning til samme forudsagte værdier.

Dermed kan vi konkludere, at der er frit valg mellem de tre trendspecifikationer. Fordele og ulemper ved de tre specifikationer kan sammenfattes således:

- Formuleringen med effektivitetsindeks (afsnit 2.2) og hybrid-formuleringen (afsnit 2.3) sikrer i Leontief-specialtilfældet positive faktorandele, (hvis Leontief-parametrene er positive); det gør D&W-formuleringen (afsnit 2.1) ikke.
- Det er muligt at lægge en fortolkning ind i effektivitetsindeksparametrene, jf. Thomsen (1999), mens de to øvrige formuleringer er mere ad-hoc.
- Formuleringen med effektivitetsindeks kan være vanskelig at estimere, da efterspørgselsligningerne er yderst ikke-lineære i parametrene, omvendt er D&W-formuleringen lineær i parametrene. Hybrid-formuleringen er ikke lineær i parametrene, men dog en del simplere end effektivitetsindeksformuleringen, idet der ikke indgår forholdet mellem effektivitetsindeks hørende til forskellige faktorer.

Samlet set, mener vi, er der mest, der taler for hybrid-formuleringen i afsnit 2.3.<sup>2</sup>

---

<sup>2</sup>Hvis de fortolkelige effektivitetsindeks efterfølgende er nødvendige for modellen, kan først estimeres hybrid-formuleringen - og derefter effektivitetsindeksformuleringen. Et tjek på, om sidstnævnte estimation er gået godt, er, at de forudsagte værdier skal være stort set ens.

**Litteratur**

DSt, DMU & Risø (1997): "Energi- og emissionsmodeller til ADAM", DSt.

W. E. Diewert (1971): "An Application of the Shepard Duality Theorem: A Generalized Leontief Production Function", *Journal of Political Economy* 79, 481-507.

W. E. Diewert & T. J. Wales (1987): "Flexible Functional Forms and Global Curvature Conditions", *Econometrica* Vol. 55 (1), 43-68.

Karsten Theil Hansen (1993): "Teknologiske fremskridt i translog- og CES-produktionsfunktionerne", modelgruppepapir KTH07d93.

Thomas Thomsen (1999): "Efterspørgslen efter produktionsfaktorer i Danmark", Danmarks Statistik, Økonomiske modeller WP99:1.

Thomas Thomsen (2000): "Short cuts to dynamic factor demand modelling", *Journal of Econometrics* 97, 1-23.