Danmarks Statistik
MODELGRUPPEN

Arbejdspapir*

Grane Høegh

22. august 2006

Dynamik i effektivitetsudvidede CES-nyttefunktioner

Resumé:

I dette papir benyttes effektivitetsudvidede CES-nyttefunktioner til at finde det relative forbrug mellem to varer. Formålet er at få mere generelle relationer end med den almindelige CES-nyttefunktion. Især ønskes det at få en funktionel form, hvor indkomsteffekter kan spille ind. Den udledte relation kan ses som en ligevægtsrelation, og dynamik kan lægges ind ad hoc. Dette giver, alt efter hvordan dynamikken indlægges, forskellige restriktioner. Alternativt til at indlægge dynamik ad hoc kan laggede endogene variabler inkluderes i effektivitetsindekset, hvilket vil give en dynamisk ligning med en alternativ restriktion end den givet for ad hoc modelleringen. Hvad enten restrikterede eller urestrikterede funktionelle former benyttes, så kan ligningerne i dette papir benyttes som skabelon til at dele forbrug ud på to undergrupper.

GRH22806

Nøgleord: CES-funktion, effektivitetsindeks, forbrug

1. Indledning

Flere steder i modellen har det været målet at dele forbruget ud på to underkomponenter. Eksempler er bolig og restforbrug, biler og restforbrug samt benzin og offentligt transport. Dette er typisk gjort ved hjælp af en log-lineær fejlkorrektionsmodel uden teoretisk grundlag. I dette papir opstilles et delvist teoretisk grundlag for disse modeller. Sammen med dette grundlag etableres en kritik af, hvad der kan gå galt i disse modeller. Der argumenteres for, at alle sådanne fordelingsmodeller estimeres på baggrund af relative forbrug.

Med hensyn til valget mellem kollektiv transport og benzin benyttes en CES-funktion, jf. RHM25102. I MAR30900 foreslås det at benytte denne fremgangsmåde til at estimere hele forbrugssystemet. Den store ulempe ved denne fremgangsmåde er, at indkomstelasticiteterne med almindelige CES-nyttefunktioner er bundet til at være ens for alle varer. Dette er en meget urimelig antagelse – især hvis for eksempel transport skal deles ud mellem biler og benzin, idet indkomstelasticiteten for biler må forventes noget højere end for benzin. På baggrund af den effektivitetsudvidede CES-nyttefunktion givet i dette papir er en struktur som foreslået i MAR30900 mulig uden at påtvinge ens indkomstelasticiteter.

Almindelig praksis for mange ligninger er at have en ligevægtsrelation opbygget på baggrund af teorien og herefter benytte den i en fejlkorrektionsrelation. Dette er for en enkeltligning i et system, hvor forbrug skal deles ud på to varer uhænsigtsmæssigt. Til gengæld er det en mulig fremgangsmåde, hvis der kigges på det relative forbrug. Baggrunden for en fejlkorrektionsmodel er trægheder. Alt efter hvad der betragtes som trægt ændres fejlkorrektionsmodellen. I de fleste tilfælde er det dog blot parameterrestriktioner der ændrer sig. I dette papir gennemgås mange forskellige måder at formulere ad hoc dynamik.

Ønskes en mere teoretisk funderet dynamik er dette også muligt blot ved at udvide effektivitetsindekset med laggede endogene variabler. Dette vil normalt gøre optimeringsproblemet dynamisk og noget vanskeligere at løse. Ses bort fra det dynamiske link er det dog muligt at få en struktur, der ligner den ad hoc-model, som blev opstillet tidligere. Eneste undtagelse er en parameterrestriktion på den kortsigtede priselasticitet.

I kapitel 2 findes de relative forbrug på baggrund af en effektivitetsudvidet CES-nyttefunktion. Det fundne optimale relative forbrug betragtes i kapitel 3 som et ligevægtsforbrug, og forskellige måder at indføre ad hoc dynamik diskuteres. Hvordan budgettet over et Törnqvistprisindeks kan approksimere nytten gennemgås i kapitel 4. Kapitel 5 giver en funktionel form, der sammen med den mest generelle ad hoc dynamik kan benyttes til estimation. Udledning af en mere teoretisk underbygget dynamisk relation udledes i kapitel 6. Endelig kommer en konklusion i kapitel 7.

2. Effektivitetsudvidet CES-nyttefunktion

Udvides CES-nyttefunktionen med et effektivtetsindeks får den formen:

$$U(x_1,x_2)=\left(\theta\left(e_1x_1\right)^{(\sigma-1)/\sigma}+(1-\theta)\left(e_2x_2\right)^{(\sigma-1)/\sigma}\right)^{\sigma/(\sigma-1)} \tag{2.1}$$

hvor U er nytten, x_1 og x_2 er input-goder til nyttefunktionen, θ og σ er parametre, mens $e_1=e_1(U)$ og $e_2=e_2(U)$ er effektivitetsindekset.

For et givet nytteniveau $U=\overline{U}$ ønskes det at minimere udgiften til vare 1 og 2. Optimeringsproblemet er givet ved:

$$\begin{aligned}&\min_{x_1,x_2} c\left(p_1,p_2,\overline{U}\right)=p_1x_1+p_2x_2\\&s.t.\\&\left(\theta\left(e_1\left(\overline{U}\right)x_1\right)^{(\sigma-1)/\sigma}+(1-\theta)\left(e_2\left(\overline{U}\right)x_2\right)^{(\sigma-1)/\sigma}\right)^{\sigma/(\sigma-1)}=\overline{U}\end{aligned} \tag{2.2}$$

På baggrund af dette kan følgende Lagrangefunktion opskrives:

$$\begin{aligned}L=\;&p_1x_1+p_2x_2\\&-\lambda\left(\left(\theta\left(e_1\left(\overline{U}\right)x_1\right)^{(\sigma-1)/\sigma}+(1-\theta)\left(e_2\left(\overline{U}\right)x_2\right)^{(\sigma-1)/\sigma}\right)^{\sigma/(\sigma-1)}-\overline{U}\right)\end{aligned} \tag{2.3}$$

Første-ordensbetingelserne til Lagrangefunktionen er givet ved:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1}=p_1-\lambda\theta\overline{U}^{1/\sigma}\left(e_1\left(\overline{U}\right)\right)^{(\sigma-1)/\sigma}x_1^{-1/\sigma}=0 \tag{2.4}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2}=p_2-\lambda\theta\overline{U}^{1/\sigma}\left(e_2\left(\overline{U}\right)\right)^{(\sigma-1)/\sigma}x_2^{-1/\sigma}=0 \tag{2.5}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda}=\overline{U}-\left(\theta\left(e_1\left(\overline{U}\right)x_1\right)^{(\sigma-1)/\sigma}+(1-\theta)\left(e_2\left(\overline{U}\right)x_2\right)^{(\sigma-1)/\sigma}\right)^{\sigma/(\sigma-1)}=0 \tag{2.6}$$

Ligning (2.4) og (2.5) giver det relative forhold mellem de to varer:

$$\frac{x_1}{x_2}=\left(\frac{\theta}{1-\theta}\right)^{\sigma}\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{-\sigma}\left(\frac{e_1\left(\overline{U}\right)}{e_2\left(\overline{U}\right)}\right)^{\sigma-1} \tag{2.7}$$

Dette adskiller sig fra standard ved, at det relative forhold mellem varerne afhænger af nytteniveauet.

Isoleres vare 1 i ligning (2.7), indsættes i ligning (2.6) og isoleres vare 2 fås:

$$x_2=\left(\theta^{\sigma}\left(\frac{p_1}{e_1\left(\overline{U}\right)}\right)^{-(\sigma-1)}+(1-\theta)^{\sigma}\left(\frac{p_2}{e_2\left(\overline{U}\right)}\right)^{-(\sigma-1)}\right)^{-\frac{\sigma}{\sigma-1}}(1-\theta)^{\sigma}p_2^{-\sigma}\left(e_2\left(\overline{U}\right)\right)^{\sigma-1}\overline{U} \tag{2.8}$$

og indsættes (2.8) i (2.7) og isoleres vare 1 fås:

$$x_1=\left(\theta^{\sigma}\left(\frac{p_1}{e_1\left(\overline{U}\right)}\right)^{-(\sigma-1)}+(1-\theta)^{\sigma}\left(\frac{p_2}{e_2\left(\overline{U}\right)}\right)^{-(\sigma-1)}\right)^{-\frac{\sigma}{\sigma-1}}\theta^{\sigma}p_1^{-\sigma}\left(e_1\left(\overline{U}\right)\right)^{\sigma-1}\overline{U} \tag{2.9}$$

Indsættes (2.8) og (2.9) i omkostningsfunktionen i (2.2) fås den optimale omkostningsfunktion:

$$C\left(p_1, p_2, \bar{U}\right) = \left(\theta^{\sigma} \left(\frac{p_1}{e_1\left(\bar{U}\right)} \right)^{-(\sigma-1)} + \left(1-\theta\right)^{\sigma} \left(\frac{p_2}{e_2\left(\bar{U}\right)} \right)^{-(\sigma-1)} \right)^{-\frac{1}{\sigma-1}} \bar{U} \quad (2.10)$$

Skal den minimale formue være mindre eller lig beløbet *w*, så findes nytten $\bar{U}$ implicit som funktion af priserne og beløbet *w*:

$$\bar{U} = \left(\theta^{\sigma} \left(\frac{p_1}{e_1\left(\bar{U}\right)} \right)^{-(\sigma-1)} + \left(1-\theta\right)^{\sigma} \left(\frac{p_2}{e_2\left(\bar{U}\right)} \right)^{-(\sigma-1)} \right)^{\frac{1}{\sigma-1}} w \quad (2.11)$$

På baggrund af ligning (2.11) kan ligning (2.8) og (2.9) omskrives til:

$$\begin{aligned} \log x_1 = {} & \sigma \log\left(\theta\right) - \sigma \log\left(\frac{p_1}{w/\bar{U}\left(p_1, p_2, w\right)} \right) \\ & + \log\left(\left(\bar{U}\left(p_1, p_2, w\right)\right)\right) + \left(\sigma-1\right)\log\left(e_1\left(\bar{U}\left(p_1, p_2, w\right)\right)\right) \end{aligned} \quad (2.12)$$

og

$$\begin{aligned} \log x_2 = {} & \sigma \log\left(1-\theta\right) - \sigma \log\left(\frac{p_2}{w/\bar{U}\left(p_1, p_2, w\right)} \right) \\ & + \log\left(\left(\bar{U}\left(p_1, p_2, w\right)\right)\right) + \left(\sigma-1\right)\log\left(e_2\left(\bar{U}\left(p_1, p_2, w\right)\right)\right) \end{aligned} \quad (2.13)$$

Ovenstående ligninger skal benyttes i afsnit 3.

Ligning (2.7) kan omskrives til:

$$\log\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \alpha_0 - \sigma \log\left(\frac{p_1}{p_2}\right) + \left(\sigma-1\right)\log\left(\frac{e_1\left(\bar{U}\left(p_1, p_2, w\right)\right)}{e_2\left(\bar{U}\left(p_1, p_2, w\right)\right)}\right) \quad (2.14)$$

hvor $\alpha_0 \equiv \sigma \log\left(\frac{\theta}{1-\theta}\right)$. Tilsammen giver ligning (2.11) og (2.14) den relative mængde af vare 1 og 2 som funktion af priser og indkomst.

3. Ad hoc dynamiske ligning

Der findes flere forskellige måder at indføre dynamik i modellen. I dette afsnit præsenteres flere forskellige måder. De er dog alle mere eller mindre ad hoc. Ligning (2.14) betragtes som en ligevægtsrelation, der gælder, hvis begge varer kan tilpasses uden problemer. For varige varer vil tilpasningen på grund af købs- og salgsudgifter ikke være øjeblikkelig. Endvidere kan der være vaneelementer, som gør tilpasningen træg for selv ikke-varige forbrugsgoder. Dette betyder, at ligning (2.14) kun udgør det ønskede relative forhold og bør skrives:

$$\log\left(\frac{x_{1,t}}{x_{2,t}}\right)^{*} = \alpha_0 - \sigma \log\left(\frac{p_{1,t}}{p_{2,t}}\right) + \left(\sigma-1\right)\log\left(\frac{e_1\left(\bar{U}\left(p_{1,t}, p_{2,t}, w_t\right)\right)}{e_2\left(\bar{U}\left(p_{1,t}, p_{2,t}, w_t\right)\right)}\right) \quad (3.1)$$

Der er tre måder at betragte træghed i varerne på. Den ene er, at det relative forhold mellem de to varer er trægt. Altså en træghed i $x_{1,t}/x_{2,t}$. Alternativt kan det relative forhold mellem de effektive enheder betragtes som trægt. Dette giver en træghed i $e_{1,t}x_{1,t}/e_{2,t}x_{2,t}$. Endelig kan de to varer betragtes som træge hver for sig.

Er tilpasningen $x_{1,t}/x_{2,t}$ træg, hvor ϕ af ændringen tilpasses umiddelbart, mens den resterende del tilpasses med γ i hver af de følgende perioder fås:

$$D\log\left(\frac{x_{1,t}}{x_{2,t}}\right)=\phi D\log\left(\frac{x_{1,t}}{x_{2,t}}\right)^{*}-\gamma\left(\log\left(\frac{x_{1,t-1}}{x_{2,t-1}}\right)-\log\left(\frac{x_{1,t-1}}{x_{2,t-1}}\right)^{*}\right)+J_t \quad (3.2)$$

hvor J_t er et fejlled bestående af andre ændringer. Hvilket kan omskrives til:

$$\begin{aligned}D\log\left(\frac{x_{1,t}}{x_{2,t}}\right)=&-\phi\sigma D\log\left(\frac{p_{1,t}}{p_{2,t}}\right)+\phi(\sigma-1)D\log\left(\frac{e_1\left(\bar{U}\left(p_{1,t},p_{2,t},w_t\right)\right)}{e_2\left(\bar{U}\left(p_{1,t},p_{2,t},w_t\right)\right)}\right)\\&-\gamma\left(\log\left(\frac{x_{1,t-1}}{x_{2,t-1}}\right)-\log\left(\frac{x_{1,t-1}}{x_{2,t-1}}\right)^{*}\right)+J_t\end{aligned} \quad (3.3)$$

Restriktionen på parametrene er her, at forholdet mellem tilpasningen for priser og indkomst er det samme for umiddelbare stød og stød fra tidligere perioder.

Er tilpasningen af $e_{1,t}x_{1,t}/e_{2,t}x_{2,t}$ træg, så vil ændringer i effektivitetsindeksene umiddelbart slå igennem i $x_{1,t}/x_{2,t}$. I dette tilfælde kan den dynamiske relation opskrives som:

$$\begin{aligned}D\log\left(\frac{e_{1,t}x_{1,t}}{e_{2,t}x_{2,t}}\right)=&\phi D\log\left(\frac{e_{1,t}x_{1,t}}{e_{2,t}x_{2,t}}\right)^{*}\\&-\gamma\left(\log\left(\frac{e_{1,t-1}x_{1,t-1}}{e_{2,t-1}x_{2,t-1}}\right)-\log\left(\frac{e_{1,t-1}x_{1,t-1}}{e_{2,t-1}x_{2,t-1}}\right)^{*}\right)+J_t\end{aligned} \quad (3.4)$$

Denne ligning kan omskrives til:

$$\begin{aligned}D\log\left(\frac{x_{1,t}}{x_{2,t}}\right)=&-\phi\sigma D\log\left(\frac{p_{1,t}}{p_{2,t}}\right)+(\phi\sigma-1)D\log\left(\frac{e_1\left(\bar{U}\left(p_{1,t},p_{2,t},w_t\right)\right)}{e_2\left(\bar{U}\left(p_{1,t},p_{2,t},w_t\right)\right)}\right)\\&-\gamma\left(\log\left(\frac{x_{1,t-1}}{x_{2,t-1}}\right)-\log\left(\frac{x_{1,t-1}}{x_{2,t-1}}\right)^{*}\right)+J_t\end{aligned} \quad (3.5)$$

Den kortsigtede tilpasningsdynamik er altså afhængig af, hvilket forhold der er trægt. Ulempen ved ovenstående metode er, at træghed i forholdet mellem to varer er lidt svært at fortolke.

Betragtes varerne som træge hver for sig. Er det fristende at opskrive ligningerne hver for sig på samme måde som ovenfor, hvilket betyder, at ϕ af ændringen tilpasses umiddelbart, mens den resterende del af forskellen til ligevægtsniveauet tilpasses med γ i hver af de følgende perioder. Hermed kan efterspørgslen efter vare 1 skrives som:

$$D\log\left(x_{1,t}\right)=\phi_1 D\log\left(x_{1,t}^*\right)-\gamma_1\left(\log\left(x_{1,t-1}\right)-\log\left(x_{1,t-1}^*\right)\right)+J_{1,t} \tag{3.6}$$

og efterspørgslen efter vare 2 kan skrives som:

$$D\log\left(x_{2,t}\right)=\phi_2 D\log\left(x_{2,t}^*\right)-\gamma_2\left(\log\left(x_{2,t-1}\right)-\log\left(x_{2,t-1}^*\right)\right)+J_{2,t} \tag{3.7}$$

I ovenstående ligninger er det fejlleddene, som skal sikre, at budgetbetingelsen er overholdt. Dette betyder, at hvis fejlleddene i fremskrivninger sættes til nul, så vil budgetrestriktionen ikke holde, hvilket betyder at delkomponeneterne ikke summer til den samlede udgift.

Baggrunden for inkonsistensen er, at budgettet er overholdt i ligevægt. Så når ligevægten kun tilpasses delvist, så vil et mindsket budget betyde overforbrug af de enkelte varer og et øget budget betyde underforbrug. Endvidere vil parameterestimaterne blive skæve, da fejlleddene på ingen måder har pæne egenskaber.

Et alternativ er at estimere den ene ligning og bestemme den anden residualt. Dette er tilfældet for eksempelvis boligforbruget i den nuværende modelversion. Fordelen ved dette er, at det sikrer, at budgetbetingelsen er overholdt – selv når fejlleddet er lig nul. En ulempe er, at forudsigelserne er afhængige af, hvilken vare det vælges at modellere. Endvidere vil parametrene stadig være skæve, da ligningen stadig er inkonsistent.

Et alternativ er at benytte (3.6) og (3.7) til at opskrive den relative ændring i det relative forbrug:

$$\begin{aligned}D\log\left(\frac{x_{1,t}}{x_{2,t}}\right)&=\phi_1 D\log\left(x_{1,t}^*\right)-\phi_2 D\log\left(x_{1,t}^*\right)-\gamma_1\left(\log\left(x_{1,t-1}\right)-\log\left(x_{1,t-1}^*\right)\right)\\&\quad-\gamma_2\left(\log\left(x_{2,t-1}\right)-\log\left(x_{2,t-1}^*\right)\right)+J_t\end{aligned} \tag{3.8}$$

hvor $J_t \equiv \left(J_{1,t}-J_{2,t}\right)$.

Antages det, at tilpasningen til ligevægten er ens for de to goder – altså $\gamma_1=\gamma_2$, så fås:

$$\begin{aligned}D\log\left(\frac{x_{1,t}}{x_{2,t}}\right)&=\phi_1 D\log\left(\frac{x_{1,t}}{x_{2,t}}\right)^*-\left(\phi_2-\phi_1\right)D\log\left(x_{2,t}^*\right)\\&\quad-\gamma\left(\log\left(\frac{x_{1,t-1}}{x_{2,t-1}}\right)-\log\left(\frac{x_{1,t-1}}{x_{2,t-1}}\right)^*\right)+J_t\end{aligned} \tag{3.9}$$

hvor $J_t \equiv J_{1,t}+J_{2,t}$. Hvis den kortsigtede tilpasning af begge varer også er identisk - $\phi_2=\phi_1$, så vil relationen kunne reduceres til (3.3).

Er den kortsigtede tilpasning ikke ens for de to varer, så fås:

$$
\begin{aligned}
D\log\left(\frac{x_{1,t}}{x_{2,t}}\right) &= -\phi_1\sigma D\log\left(\frac{p_{1,t}}{p_{2,t}}\right) + \phi_1(\sigma-1)D\log\left(\frac{e_1\left(\bar{U}\left(p_{1,t},p_{2,t},w_t\right)\right)}{e_2\left(\bar{U}\left(p_{1,t},p_{2,t},w_t\right)\right)}\right) \\
&\quad -(\phi_2-\phi_1)\sigma D\log\left(\frac{p_{2,t}}{w_t/\bar{U}\left(p_{1,t},p_{2,t},w_t\right)}\right) \\
&\quad -(\phi_2-\phi_1)D\log\left(\bar{U}\left(p_{1,t},p_{2,t},w_t\right)\right) \\
&\quad -\gamma\left(\log\left(\frac{x_{1,t-1}}{x_{2,t-1}}\right)-\log\left(\frac{x_{1,t-1}}{x_{2,t-1}}\right)^*\right)+J_t
\end{aligned}
\tag{3.10}
$$

Denne ligning er ikke specielt køn, men fortolkningen er relativ intuitiv. De første to led er den umiddelbare tilpasning til den langsigtede ligevægt, mens det sidste led er den langsigtede tilpasning. De tredje led repræsenterer hvordan den ene vare hurtigere tilpasser sig priseffekter, og det fjerde led repræsenterer den hurtigere tilpasning til indkomsteffekter fra denne vare.

Fordelene ved den sidste fremgangsmåde er, at budgetrestriktionen automatisk er overholdt, og at fejlleddet har noget bedre egenskaber. Det forventede fejlled vil ikke på samme måde være positivt korreleret med indkomsten, da der nu er modsatrettede effekter. Ulempen er dog, at parameterrestriktionerne bygger på to ligninger som hver for sig er inkonsistente.

Endelig kan det accepteres, at det på baggrund af ad hoc formuleringer ikke er muligt at udlede korrekte parameterrestriktioner. Det må erkendes, at de forskellige parametre er retrikterede til at opfylde helt bestemte forhold, men samtidig er de sande restriktioner ukendte og påføres derfor ikke. Under en sådan formulering kan alt smides ind, så længe der er frihedsgrader nok. Et eksempel er:

$$
\begin{aligned}
D\log\left(\frac{x_{1,t}}{x_{2,t}}\right) &= \phi_1 D\log\left(\frac{p_{1,t}}{p_{2,t}}\right) + \phi_2 D\log\left(\frac{e_1\left(\bar{U}\left(p_{1,t},p_{2,t},w_t\right)\right)}{e_2\left(\bar{U}\left(p_{1,t},p_{2,t},w_t\right)\right)}\right) \\
&\quad -\gamma\left(\log\left(\frac{x_{1,t-1}}{x_{2,t-1}}\right)-\log\left(\frac{x_{1,t-1}}{x_{2,t-1}}\right)^*\right)+J_t
\end{aligned}
\tag{3.11}
$$

Det er dog muligt at indføre dynamik uden at betragte ligning (2.14) som en ligevægtrelation. Det er muligt, at effektivitetsindeksene afhænger af sidste periodes nytte og af vareforholdet i sidste periode. Dette vil indføre dynamik, men hvis der tages hensyn til at nutidige forbrug kan influere fremtidig nytte, så kan optimeringsproblemet ikke løses i en statisk model. Den nemmeste vej til at løse dette problem er en antagelse om, at fremtidig nytte ikke vægtes i optimeringen. Hvorfor dette skulle være tilfældet er uvist, men denne ad hoc antagelse vi sandsynligvis ikke være værre end den måde dynamikken er indført i dette kapitel. Denne måde at indføre dynamik bliver beskrevet i et senere kapitel.

4. Implementering af eksogent Törnqvistindeks

Eftersom nytten ikke er eksplicit givet i ligning (2.11) kan der ikke udledes et teoretisk korrekt analytisk udtryk for prisen for en nytteenhed. Törnqvist indekset kan dog approksimere prisen på en nytteenhed:

$$P_t^{Törn} \approx \frac{w_t}{\bar{U}\left(p_{1,t}, p_{2,t}, w_t\right)} \tag{3.12}$$

Törnqvistindekset er givet ved:

$$P_t^{Törn} = P_{t-1}^{Törn} \left(\frac{p_{1,t}}{p_{1,t-1}}\right)^{\frac{1}{2}\left(s_{1,t-1}+s_{1,t}\right)} \left(\frac{p_{2,t}}{p_{2,t-1}}\right)^{\frac{1}{2}\left(s_{2,t-1}+s_{2,t}\right)} \tag{3.13}$$

hvor $s_{i,t} = \frac{p_{1,t}x_{1,t}}{p_{1,t}x_{1,t}+p_{2,t}x_{2,t}}$ for i=1,2. Umiddelbart afhænger Törnqvistindekset både af samme periodes priser og mængder, og hermed også af nytten. Dette betyder, at man heller ikke ved at benytte dette uden yderligere antagelser kan finde en teoretisk korrekt approksimation for prisen. Betragtes Törnqvistindekset som eksogent og uafhængigt af priser og mængder, så kan ligningerne estimeres ved simpel OLS. Parameterestimaterne vil ikke være konsistente, men skævheden er muligvis begrænset.

Under ovenstående antagelser kan fejlkorrektionsligningen opskrives som[1]:

$$\begin{aligned} D\log\left(\frac{x_{1,t}}{x_{2,t}}\right) = &-\phi_1\sigma D\log\left(\frac{p_{1,t}}{P_t^{Törn}}\right) + \phi_2\sigma D\log\left(\frac{p_{2,t}}{P_t^{Törn}}\right) \\ &+\left(\phi_1-\phi_2\right)D\log\left(\frac{w_t}{P_t^{Törn}}\right) \\ &+\phi_1\left(\sigma-1\right)D\log\left(e\left(\frac{w_t}{P_t^{Törn}}\right)\right) \\ &-\gamma\left(\log\left(\frac{x_{1,t-1}}{x_{2,t-1}}\right)-\log\left(\frac{x_{1,t-1}}{x_{2,t-1}}\right)^*\right)+J_t \end{aligned} \tag{3.14}$$

hvor det ønskede relative forhold er givet ved:

$$\log\left(\frac{x_{1,t}}{x_{2,t}}\right)^* = \alpha_0 - \sigma\log\left(\frac{p_{1,t}}{p_{2,t}}\right) + \left(\sigma-1\right)\log\left(e\left(\frac{w_t}{P_t^{Törn}}\right)\right) \tag{3.15}$$

5. En funktionel form for effektivitetsindekset

Indtil nu har effektivitetsindekset været angivet generelt. For at få en modellering, der minder om den nuværende, vælges en ganske bestemt funktionel form givet ved:

$$\frac{e_1\left(\bar{U}\right)}{e_2\left(\bar{U}\right)} = \bar{U}^{\tilde{\alpha}_1}\exp\left(Dummies\cdot\tilde{\alpha}_2\right)\exp\left(\tilde{\alpha}_3\left(1+\left(\frac{\log\bar{U}}{\lambda_1}\right)^{-\lambda_2}\right)^{-1}\right) \tag{5.1}$$

[1] Notationen er uændret selvom parametrene og fejlleddet strengt taget ikke er de samme.

hvor $Dummies$ er en vektor af dummy-variabler, og sidste led er en logistisk trend. I langt de fleste tilfælde vil $\tilde{\alpha}_2 = \tilde{\alpha}_3 = 0$ vælges. Dog vil det i visse relationer vælges at indføre dymmyer eller alternative indkomsttrender.

Benyttes Törnqvistindekset og betragtes det som eksogent, kan logaritmen til effektivitetsindekset skrives som:

$$\log\left(\frac{e_1\left(\bar{U}_t\right)}{e_2\left(\bar{U}_t\right)}\right) = \tilde{\alpha}_1 \log\left(\frac{w_t}{P_t^{Törn}}\right) + Dummies \cdot \tilde{\alpha}_2 + \tilde{\alpha}_3\left(1 + \left(\frac{\log\left(w_t / P_t^{Törn}\right)}{\lambda_1}\right)^{-\lambda_2}\right)^{-1} \quad (5.2)$$

På baggrund af ovenstående kan ad hoc fejlkorrektionsmodellen, hvor parametrene er frie opskrives som:

$$D\log\left(\frac{x_{1,t}}{x_{2,t}}\right) = \beta_1 D\log\left(\frac{p_{1,t}}{p_{2,t}}\right) + \beta_2 D\log\left(\frac{w_t}{P_t^{Törn}}\right) + D\left(Dummies\right)\beta_2\frac{\alpha_2}{\alpha_1} + \beta_2\frac{\alpha_3}{\alpha_1}D\left[\left(1 + \left(\frac{\log\left(w_t / P_t^{Törn}\right)}{\lambda_1}\right)^{-\lambda_2}\right)^{-1}\right] - \gamma\left(\log\left(\frac{x_{1,t-1}}{x_{2,t-1}}\right) - \log\left(\frac{x_{1,t-1}}{x_{2,t-1}}\right)^*\right) + J_t \quad (5.3)$$

hvor $\beta_1 = \phi_1$, $\beta_2 = \phi_2\tilde{\alpha}_1$, $\alpha_i = \left(\sigma - 1\right)\tilde{\alpha}_i$ for i=1,2,3, og det ønskede relative forhold er givet ved:

$$\log\left(\frac{x_{1,t}}{x_{2,t}}\right)^* = \alpha_0 - \sigma\log\left(\frac{p_{1,t}}{p_{2,t}}\right) + \alpha_1\log\left(\frac{w_t}{P_t^{Törn}}\right) + Dummies \cdot \alpha_2 + \alpha_3\left(1 + \left(\frac{\log\left(w_t / P_t^{Törn}\right)}{\lambda_1}\right)^{-\lambda_2}\right)^{-1} \quad (5.4)$$

Det bør nævnes, at α_3 bestemmes udelukkende på baggrund af den funktionelle form.

6. Effektivitetsindeks med dynamik

Accepteres antagelsen om, at fremtidige nytter ikke påvirker den nuværende forbrugsbeslutning, så kan laggede endogene variabler inkluderes i effektivitetsindekset, og dynamik kan inkluderes mere formelt. I dette tilfælde vælges også en bestemt funktionel form, som minder meget om den ovenfor. Logartimen til effektivitetsindekset er således, når Törnqvistindekset benyttes, givet ved:

$$\log\left(\frac{e_{1,t}}{e_{2,t}}\right)=\tilde{\alpha}_1\log\left(\bar{U}_t\right)+Dummies_t\cdot\tilde{\alpha}_2+\tilde{\alpha}_3\left(1+\left(\frac{\log\bar{U}_t}{\lambda_1}\right)^{-\lambda_2}\right)^{-1}$$
$$+\tilde{\alpha}_4\log\left(\bar{U}_{t-1}\right)+\tilde{\alpha}_5\log\left(\frac{x_{1,t-1}}{x_{2,t-1}}\right) \tag{6.1}$$

Indsættes (6.1) i (2.14) kan den omskrives til:

$$D\log\left(\frac{x_{1,t}}{x_{2,t}}\right)=\left(-\beta_1\beta_6\right)D\log\left(\frac{p_{1,t}}{p_{2,t}}\right)+\beta_5 D\log\left(\frac{w_t}{P_t^{Törn}}\right)+D\left(Dummies\right)\beta_3\frac{\beta_5}{\beta_2}$$
$$+\beta_4\frac{\beta_5}{\beta_2}D\left[\left(1+\left(\frac{\log\left(w_t/P_t^{Törn}\right)}{\lambda_1}\right)^{-\lambda_2}\right)^{-1}\right] \tag{6.2}$$
$$+\beta_6\left(\log\left(\frac{x_{1,t-1}}{x_{2,t-1}}\right)-\log\left(\frac{x_{1,t-1}}{x_{2,t-1}}\right)^*\right)+J_t$$

hvor $\beta_1\equiv-\frac{\sigma}{1-(\sigma-1)\tilde{\alpha}_5}$, $\beta_2\equiv\frac{(\sigma-1)(\tilde{\alpha}_1+\tilde{\alpha}_4)}{1-(\sigma-1)\tilde{\alpha}_5}$, $\beta_3\equiv\frac{(\sigma-1)}{1-(\sigma-1)\tilde{\alpha}_5}\tilde{\alpha}_2$, $\beta_4\equiv\frac{(\sigma-1)\tilde{\alpha}_3}{1-(\sigma-1)\tilde{\alpha}_5}$, $\beta_5\equiv(\sigma-1)\tilde{\alpha}_4$, $\beta_6\equiv-\left(1-(\sigma-1)\tilde{\alpha}_5\right)$, og ligevægtsrelationen er givet ved:

$$\log\left(\frac{x_{1,t}}{x_{2,t}}\right)^*=\beta_0+\beta_1\log\left(\frac{p_{1,t}}{p_{2,t}}\right)+\beta_2\log\left(\frac{w_t}{P_t^{Törn}}\right)$$
$$+Dummies\cdot\beta_3+\beta_4\left(1+\left(\frac{\log\left(w_t/P_t^{Törn}\right)}{\lambda_1}\right)^{-\lambda_2}\right)^{-1} \tag{6.3}$$

hvor $\beta_0\equiv\frac{\alpha_0}{1-(\sigma-1)\tilde{\alpha}_5}$. Denne relation er magen til den, hvor dynamikken er indbygget ad hoc. Eneste forskel er restriktionen på den kortsigtede priselasticitet, som siger, at den umiddelbare tilpasning til ligevægten på baggrund af priser er den samme som den langsigtede tilpasning.

7. Konklusion

Hvad enten dynamikken for det relative forbrug udledes på baggrund af at inkludere laggede endogene variabler i nyttefunktion eller påstuleres ad hoc, så fås samme relation. Forskellen er blot nogle restriktioner pålagt parameterestimaterne. Disse relation kan benyttes som skabelon alle steder, hvor det ønskes at dele forbrug ud på to underkomponenter. Forhåbenligt kan dette også danne basis for en reformulering af forbrugssystemet, hvor alt forbrug deles ud på baggrund af nestede CES-nyttefunktioner med effektivitetsindeks.