Danmarks Statistik
MODELGRUPPEN

Arbejdspapir [udkast]

Jakob Nielsen

25. november 2003

Udkast til: User cost udtrykket med intern-, ekstern-, samt gældsfinansiering.

Resumé:

Papiret viser påvirkningen af den finansielle del af user cost udtrykket for intern-, ekstern- og gældsfinansiering, og sammenhængen til Tobins q beskrives. Udgangspunktet er virksomhedens optimering, og der gives en kort beskrivelse af hvorledes egenkapital- og gæld kan prisfastsættes ved hjælp af optionsteori.
Dette er et foreløbigt udkast pr. 27/11 – 2003.

JAN

Nøgleord:

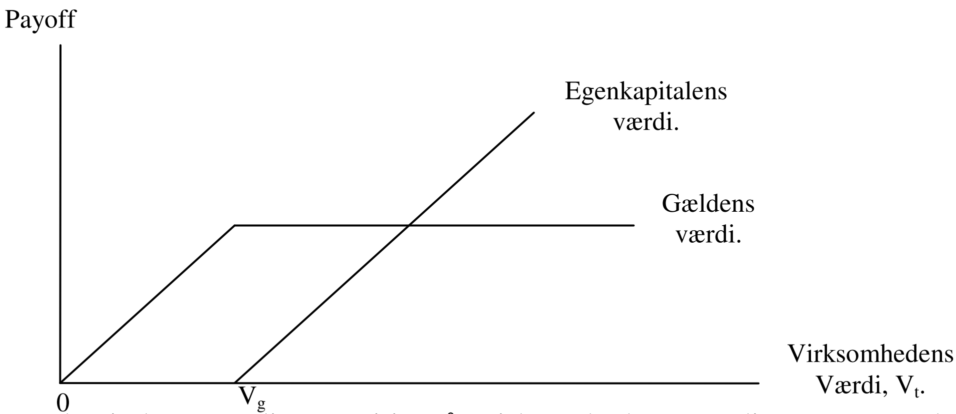
1. Indledning.

Formålet med papiret er at undersøge virksomheders finansieringsomkostning ved alternative finansieringsmetoder. De mulige finansieringsmetoder er egenfinansiering (tilbageholdt overskud), øget egenkapital (aktier), samt gæld. Samtidig undersøges hvorledes beskatning påvirker optimal kapitalstruktur, og der tages udgangspunkt i en ingen arbitrage betingelse, hvor krævet efter skat afkast er ens for forskellige placeringer. Endelig udledes sammenhængen mellem user cost, Tobins q og virksomhedens værdi, hvorved egenkapitalens værdi og optimalt kapitalapparat bestemmes.

2. Gæld og egenkapital.

Udledning af user cost antager ofte konstante afkastkrav fra fx gæld og egenkapital.[1] Antagelsen er rimelig for ”små og mellem” gældsandele,[2] mens det krævede afkast er stigende i gældsniveauet. Egenkapitalens værdi er ækvivalent til payoff fra en (lang) call option.[3,4] Gælden kan værdisættes som en portefølje af virksomhedens aktiver og en kort call option på disse. Figur 2.1 illustrerer payoff til gæld og egenkapital som funktion af virksomhedens værdi, V_t.

Figur 2.1. Egenkapitalens og gældens værdi.



Egenkapitalens værdi er positiv når virksomhedens værdi er større end gældens, idet gæld har højest prioritet (egenkapital er residual aflønnet). Egenkapitalens værdi er lig en call option på virksomheden med exercisepris V_g. Gældens værdi svarer til værdien af en portefølje bestående af virksomheden, samt en kort call option på denne med exercisepris V_g. Call optionens værdi er nul så længe virksomhedens værdi er lavere end V_g, da virksomheden kan købes billigere i markedet. Når virksomhedens værdi er større end V_g, er egenkapitalens (call

[1] Se fx Dalgaard og Pedersen (1998), Jorgenson (1963), Jorgenson og Stephenson (1967) og Rasmussen (1993).

[2] Gæld som andel af virksomhedens samlede værdi.

[3] Lang (position i) call option henfører til at den købes, mens en kort position henfører til at dn sælges. Kort/lang henfører til at optionens værdi stammer fra den medfølgende ret til at købe/sælge et (underliggende) aktiv til en fastsat pris.

[4] En call option er retten til at købe et aktiv til en given pris på et givent tidspunkt (som benævnes exercisetidspunktet). Europæiske optioner kan kun exercises på udløbstidspunktet, hvorimod amerikanske kan exercises i hele perioden frem til udløb. En call options værdi på exercisetidspunktet er positiv hvis exerciseprisen er lavere end markedsprisen, mens den er værdiløs hvis markedsprisen er lig med eller lavere end exerciseprisen. Den modsatte gælder for en put option, da denne giver retten til at sælge til en given pris.

optionens) værdi V_t - V_g. Givet virksomhedens værdi, er værdien af egenkapitalen (call optionen) således:[5]

$$V_{egen} = \max\left[V_t - V_g, 0\right]$$

De modsatte argumenter gælder for gælden, idet den korte call option giver en øvre grænse på V_g. Gældens værdi er dermed:

$$V_g = V_t - \max\left[V_t - V_g, 0\right] = V_t - V_{egen} \tag{2.1}$$

(2.1) viser, at værdien af virksomhedernes aktiver er summen af egenkapital og gæld. Gældens og egenkapitalens afhængighed af virksomhedens samlede værdi påvirker dets krævede afkast, hvilket fx kan implementeres via som i (2.2) og (2.3).

Egenkapitalens krævede forrentning:

$$r_E = i_f + \varepsilon_0 = r_f + \dot{p} + \varepsilon_0 \tag{2.2}$$

$$\varepsilon_0 = f\left(\frac{B}{S \cdot \eta}\right) = f\left(\frac{B}{V}\right) = \varepsilon_1 f\left(\frac{B}{V}\right), \quad \frac{\partial \varepsilon_0}{\partial B} > 0, \frac{\partial \varepsilon_0}{\partial V} < 0$$

Gældens krævede forrentning:

$$r_B = i_f + \beta_0 = r_f + \dot{p} + \beta_0 \tag{2.3}$$

$$\beta_0 = f\left(\frac{B}{S \cdot \eta}\right) = f\left(\frac{B}{V}\right) = \beta_1 f\left(\frac{B}{V}\right), \quad \frac{\partial \beta_0}{\partial B} > 0, \frac{\partial^2 \beta_0}{\partial B^2} > 0, \frac{\partial \beta_0}{\partial V} < 0$$

Er gælden en konstant andel, b, af kapitalapparatet, $B = bp_K K$, simplificeres udtrykkene til:

$$r_E = r_f + \dot{p} + \varepsilon \text{ og } r_B = r_f + \dot{p} + \beta$$

(2.2) og (2.3) inkorporere at usikkerhed omkring afkastet til gæld og egenkapital stiger med gældsandelen.[6] En høj gældsandel kan medfører advers selektion med hensyn til investeringer. Da egenkapitalen kun aflønnes når gælden er indfriet, giver en høj gældsandel egenkapitalen incitament til "lotto" investeringer. Hermed menes investeringer med højt afkast, men lav sandsynlighed for succes.[7] For at sikre, at forventet afkast er lig det krævede, skal gældens forrentning hæves.
Nedenstående er afkastkravfunktionen ikke specificeret, men der skelnes mellem renten for gælden og egenkapitalen, så efterfølgende implementering lettes. En afkastkravfunktion kan sikre at den optimale kapitalstruktur består af flere finansieringstyper. Uden denne findes ofte en hjørneløsning, typisk bestemt af skatteforskelle.

3. Simpel model for virksomhedens optimale kapitalstruktur

Investorers krævede efter skat afkast er ens for alle aktiver, og ingen arbitrage betingelsen mellem aktier og obligationer er:

[5] Egenkapitalens fordel er, at positivt afkast er ubegrænset, mens tab er nedre afgrænset.
[6] Effekten på gældsomkostningen er tydeligere med flere gældsklasse (fx senior og junior gæld).
[7] Dette kaldes også "take-the-money-and-run" strategier. Disse er en følge af at tabet for egenkapitalen er nedre afgrænset, hvorfor det er ligegyldigt om virksomheden går konkurs med 1 eller 10 millioner. Eneste mulighed for afkast til egenkapitalen er, at foretage investeringer hvis afkast er tilstrækkeligt stort til at indfri gælden.

$$r_t\left(1-t_r\right)=\frac{\left(1-t_p\right)C_t+\left(1-t_k\right)\left(\dot{V}_t\right)}{V_t} \quad (3.1)$$

V	virksomhedsværdi.
C	cash flow til aktionærer.
r	obligationsforrentning.
t_r	renteindtægtsskattesats.
t_p	udbytteskattesats.
t_k	kapitalgevinstskattesats.

Investorer er kun indifferente mellem udbytter og kapitalgevinster når t_p = t_k. Et fald i udbyttet på 1 kr. kan opvejes af en kapitalgevinst på $\left(1-t_p\right)/\left(1-t_k\right)$ kr., som er mindre end 1 når udbytte beskattes hårdere end kapitalgevinster.
Cash flow til aktionærerne afhænger af udbyttet og aktieemissioner (Hungnes, 2002):

$$C_t=\left(1-t_p\right)D_t-\dot{S}$$

Givet cash flow er virksomhedens værdi løsningen til (3.1) (Dalgaard og Pedersen, 1998):

$$V_0=\int_0^{\infty}\left[\frac{1-t_P}{1-t_k}D\left(s\right)-\dot{S}\right]e^{-r_\tau s}ds, \quad r_\tau=\frac{\left(1-t_r\right)r}{\left(1-t_k\right)} \quad (3.2)$$

Transversalitets betingelsen er, at nutidsværdien af virksomhedens værdi på tidspunkt s er nul når s $\rightarrow \infty$.[8] I virksomheden er tilgang lig med anvendelse:

$$pF\left(K,L\right)+\dot{B}+\dot{S}=p_I I+wL+r_B B+T+D \quad (3.3)$$

p	outputpris.
p^I	investeringspris.
w	lønomkostning.
uc	kapitalens user cost.
r_B	gældsfinansieringsomkostning.
B	gæld.
T	skatter.
S	aktiekapital.
K	realkapital.
I	investeringer.
L	arbejdskraft.
F(•)	produktionsfunktion.

Fra (3.3) kan virksomhedens cash flow ligning for udbyttet opstilles:

$$D=\left(1-t_c\right)\left[pF\left(K,L\right)-wL-r_B B\right]-p_I I-t_k\dot{p}_K K+\delta t_c p_K K+\dot{B}+\dot{S} \quad (3.4)$$

t_c	selskabsskattesats.
t_k	kapitalgevinstskattesats.
δ	økonomisk- og skattemæssig afskrivningssats.[9]

[8] Tilgangen for det diskrete tilfælde er udledt i jan????.

Udbyttet er efter skat nettoindkomst fratrukket investeringsomkostninger og kapitalgevinstskat, og tillagt værdien af skattemæssige afskrivninger og netto gælds- og aktieudstedelse. Udbyttet kan øges ved at udbetale provenuet fra gælds og aktieudvidelser, og afhængigt udbytte- og kapitalgevinstskatteraten øges eller mindskes virksomhedens værdi. For yderligere diskussion henvises til jan????.
Gæld er en konstant andel, b, af kapitalapparatets værdi, $B = bp_K K$. Modelleringen medfører at gældens værdi ændres ved ændringer i kapitalprisen og kapitalmængden:

$$\dot{B} = b\left(\dot{p}_K K + p_K \dot{K}\right) \tag{3.5}$$

Aktiefinansiering udgør også en konstant andel, s, af kapitalapparatets værdi:

$$\dot{S} = s\left(\dot{p}_K K + p_K \dot{K}\right) \tag{3.6}$$

Aktiekapitalens værdi stiger med kapitalpris og mængde. (3.5) og (3.6) udgør eksterne finansieringsmuligheder, og sættes b og s til nul, er virksomheden 100 pct. egenkapitalfinansieret.
Udviklingen i kapitalapparatet bestemmes af nettoinvesteringerne, defineret som:

$$\dot{K} = I - \delta K \tag{3.7}$$

Den skattemæssige værdi af afskrivninger findes via z, som angiver nutidsværdien af afskrivningen på en kapitalenhed i en fremtidig periode. Der afskrives til købspris, hvormed afskrivningernes værdi er:

$$\int_0^{\infty} z p_{I,t} I_t \, dt \tag{3.8}$$

Med fokus på værdien i periode 0 skal der ikke skelnes mellem "givne" afskrivninger (foretaget før startperioden), og fremtidige afskrivninger. Det kan argumenteres, at tidligere investeringer ikke skal inddrages i maksimeringsproblemet idet deres afskrivninger er givet. Men dermed tages der ikke højde for, at skattemæssige afskrivninger kun har værdi hvis de kan udnyttes.

Virksomheden maksimerer værdien under betingelse af kapitalens udvikling (3.7) og finansieringsmetoden, (3.5) og (3.6). Indsætning af (3.4) i (3.2) giver:

$$V_0 = \int_0^{\infty} e^{-r_t t} \left\{ \frac{\left(1-t_p\right)}{\left(1-t_k\right)} \left[\left(1-t_c\right)\left(pF\left(K,L\right) - wL - r_B B\right) - \left(1 - zt_c\right) p_I I - t_k \dot{p}_k K + \dot{B} + \dot{S}\right] - \dot{S} \right\} dt$$

$$\text{s.t.} \quad \dot{K} = I - \delta K \tag{3.9}$$

Når (3.5) og (3.6) substitueres ind i objektivfunktionen, (3.9), er nutidsværdi Hamilton funktionen:

[9] Økonomiske- og skattemæssige afskrivninger antages ens. For modellering af forskellige økonomiske- og skattemæssige afskrivninger henvises bl.a. til Knudsen et al (1998) og Dalgaard og Pedersen (1998).

$$
\begin{aligned}
H &= e^{r_\tau t} H \\
&= \frac{(1-t_p)}{(1-t_k)} \Big\{ (1-t_c)\big[pF(K,L) - wL\big] - r_B b p_K K - (1 - z t_c) p_I I \\
&\quad + t_c r_B b p_K K - t_k \dot{p}_K K + b\big(\dot{p}_K K + p_K (I - \delta K)\big) + s\big(\dot{p}_K K + p_K (I - \delta K)\big)\Big\} \\
&\quad - s\big(\dot{p}_K K + p_K (I - \delta K)\big) + m\big[I - \delta K\big]
\end{aligned}
\qquad (3.10)
$$

I nutidsværdi Hamilton funktionen sættes $m(t) = e^{r_\tau t}\lambda(t)$, hvor $\lambda(t)$ er Lagrange multiplikator. Dermed måles skyggeprisen ved værdien i de enkelte perioder, m(t), samt værdien på optimeringstidspunktet, $\lambda(t)$. Den generelle løsning er givet ved relationerne er givet i appendiks A.[10]

Optimale investeringer findes ved førsteordensbetingelsen:

$$
\partial H / \partial I = \frac{(1-t_p)}{(1-t_k)} \big[-(1 - z t_c) p_I + b p_K + s p_K \big] - s p_K + m = 0 \Leftrightarrow
$$

$$
\frac{m}{p_K} = \frac{(1-t_p)}{(1-t_k)} \left[(1 - z t_c) \frac{p_I}{p_K} - (b + s) \right] + s \qquad (3.11)
$$

For at lette nedenstående beregninger, antages pris og inflation ens for alle faktorer, som ydermere sættes lig outputprisen. Når $\dot{p} = \dot{p}_I = \dot{p}_K$ er udviklingen i skyggeprisen:

$$
\frac{\dot{m}}{\dot{p}} = \left[\frac{(1-t_p)}{(1-t_k)} \big((1 - z t_c) - (b + s) \big) + s \right] \qquad (3.12)
$$

For at finde udviklingen i skyggeprisen anvendes sammenhængen mellem den "almindelige" Lagrange multiplikator, og nutidsværdi Lagrange multiplikator, hvilket giver:

$$
\frac{\lambda}{p} = e^{-r_\tau t} \left[\frac{(1-t_p)}{(1-t_k)} \big((1 - z t_c) - (b + s) \big) + s \right] \qquad (3.13)
$$

Udviklingen i skyggeprisen findes ved at differentiere med hensyn til tiden:

$$
\frac{\dot{\lambda}}{p} = -\big((r_\tau - \dot{p})/p \big) e^{-r_\tau t} \left[\frac{(1-t_p)}{(1-t_k)} \big((1 - z t_c) - (b + s) \big) + s \right] \qquad (3.14)
$$

(3.11) og (3.13) er betingelserne for optimal investering, hvor m er skyggeprisen i periode t, og $\lambda(t) = e^{-r_\tau t} m(t)$ er skyggeprisen i periode t målt i dag. Ligningerne viser investeringsfunktionen, idet de sammenkæder investeringer og real skyggepris. Kapitalapparatets ligevægt afhænger af skattemæssig værdi af afskrivninger, finansieringspolitikken, samt skattejusteringen. Større

[10] Kamian og Schwartz (1991) giver en glimrende introduktion til optimering af Hamilton funktioner.

skattemæssige afskrivninger mindsker skyggeprisen, mens en større skattejusteringsfaktor hæver den.[11] Effekt fra aktieemissioner belyses lettest når skattesatserne er 0. I dette tilfælde påvirkes investeringer ikke, mens skyggeprisen falder når kapitalgevinster beskattes lempeligere end udbytter. En vigtig konklusion er, at skatter, aktie- og gældsfinansiering, kan medføre positive investeringer, selv for en real skyggepris mindre end en.

Førsteordensbetingelsen or kapitalapparatet er:

$$\partial H/\partial K =$$

$$\frac{(1-t_p)}{(1-t_k)}\left\{(1-t_c)pF_K - r_B b p_K + t_c r_B b p_K - t_k \dot{p}_K + b(\dot{p}_K - \delta p_K) + s(\dot{p}_K - \delta p_K)\right\}$$
$$-s(\dot{p}_K - \delta p_K) - \delta m$$

Optimalt kapitalapparat findes ved at indsætte ovenstående relationer for m(t) i (*)-(***):[12]

$$\begin{aligned}\dot{m} - (r_\tau + \delta)m = -\frac{(1-t_p)}{(1-t_k)}\Big[&(1-t_c)pF_K - (1-t_c)r_B b p_K \\ &-t_k\dot{p}_K + (b+s)(\dot{p}_K - \delta p_K)\Big] + s(\dot{p}_K - \delta p_K)\end{aligned} \tag{3.15}$$

Fra (3.15) bemærkes, at i ligevægt (med ingen inflation), er kapitalens reale skyggepris:.

$$\frac{m}{p} = \frac{\frac{(1-t_p)}{(1-t_k)}\left[(1-t_c)F_K - (1-t_c)r_B b - (b+s)\delta\right] - s\delta}{(r_\tau + \delta)} \tag{3.16}$$

Skyggeprisen mindskes med selskabs- og kapitalgevinstskattesatserne, mens udbytteskattesatsen virker modsat. Graden af ekstern finansiering påvirker dels gennem gældsomkostningen, og dels gennem afskrivninger. Finansieres projekter internt (tilbageholdt overskud) reduceres (3.16) til:

$$\frac{m}{p} = \frac{(1-t_p)}{(1-t_k)}\frac{(1-t_c)F_K}{(r_\tau + \delta)}$$

Med intern finansiering er real skyggepris bestemt af kapitalens marginalprodukt justeret for skatteeffekter, afskrivninger og afkastkrav.

Nedenstående udledninger antager at kapitalpris er lig investeringspris, $p_K = p_I$, mens disse ikke nødvendigvis er lig outputprisen. For at bestemme kapitalomkostningen, og hvorledes den påvirkes finansieringspolitikken, indsættes (3.11) og (3.12) i (3.15):[13]

[11] Skattejusteringsfaktoren vokser jo lavere udbytteskattesatsen er i forhold til kapitalgevinstskattesatsen.

[12] Bemærk at fortegnene følger af (***), og derfor er modsat ”ren” differentiering af (3.10).

[13] Se appendiks B for udledning.

$$
\begin{aligned}
(1-t_c)pF_K = &\left[(1-zt_c)p_K\left[(r_\tau+\delta)-\frac{\dot{p}_K}{p_K}\right]-t_k\dot{p}_K\right.\\
&\left.+bp_K\left((1-t_c)r_B-r\frac{(1-t_r)}{(1-t_k)}\right)+sp_K\left(r_\tau\frac{(1-t_k)}{(1-t_p)}-r_\tau\right)\right]
\end{aligned} \tag{3.17}
$$

$$
\begin{aligned}
pF_K = &\frac{1}{(1-t_c)}\left[(1-zt_c)p_K\left[(r_\tau+\delta)-\frac{\dot{p}_K}{p_K}\right]-t_k\dot{p}_K\right]\\
&+bp_K\left(r_B-r\frac{(1-t_r)}{(1-t_c)(1-t_k)}\right)+\frac{sp_K}{(1-t_c)}\left(r_\tau\frac{(1-t_k)}{(1-t_p)}-r_\tau\right)
\end{aligned} \tag{3.18}
$$

(3.17) og (3.18) er det generelle udtryk for user cost efter- og før skat. Det typiske user cost udtryk (se fx Jorgenson (1963), Jorgenson og Stephenson (1967) og Rasmussen (1993)), findes ved at antage fuld intern finansiering:[14]

$$
pF_K = \frac{1}{(1-t_c)}\left[(1-zt_c)p_K\left[(r_\tau+\delta)-\frac{\dot{p}_K}{p_K}\right]-t_k\dot{p}_K\right]
$$

Udledningen antager at skattemæssige og økonomiske afskrivninger er ens.[15] For yderligere diskussion af user cost henvises til nedenstående diskussion af ligning (4.1). Fra (3.18) (og (3.17)) kan user cost med forskellig finansieringspolitik undersøges. For at lette intuitionen isoleres r_τ i leddet for afskrivninger (kantede parenteser), for at separere finansieringsomkostningen (se appendiks C):

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{(1-t_c)}p_K\left[\delta-\frac{\dot{p}_K}{p_K}-zt_c\left(\delta-\frac{\dot{p}_K}{p_K}\right)-t_k\frac{\dot{p}_K}{p_K}\right]-\\
&zt_cp_Kr\frac{(1-t_r)}{(1-t_c)(1-t_k)}+p_Kr\frac{(1-t_r)}{(1-t_c)(1-t_k)}
\end{aligned} \tag{3.19}
$$

Når (3.19) indsættes i (3.18), kan user cost skrives som:

$$
\begin{aligned}
pF_K = &\frac{1}{(1-t_c)}p_K\left[(1-zt_c)\left(\delta-\frac{\dot{p}_K}{p_K}\right)-zt_cr\frac{(1-t_r)}{(1-t_k)}-t_k\frac{\dot{p}_K}{p_K}\right]\\
&+p_K\left(br_B+(1-b)r\frac{(1-t_r)}{(1-t_c)(1-t_k)}\right)+\frac{sp_K}{(1-t_c)}\left(r\frac{(1-t_r)}{(1-t_p)}-r\frac{(1-t_r)}{(1-t_k)}\right)
\end{aligned} \tag{3.20}
$$

4. Effekten af finansieringspolitikken.

Effekten af finansieringspolitikken.

[14] Udtrykket adskiller sig fra de andre user cost (undtagen for Rasmussen (1993)), idet der er kapitalgevinstbeskatning på virksomhedsniveau. Ofte specificeres denne alene på investorniveau. Skatten er implementeret på investor såvel som virksomhedsniveau for at sikre generelle resultater. Ønskes skatten kun indført på investorniveau, kan kapitalgevinstbeskatningen for virksomheden fjernes, uden at der kræves yderligere justeringer af de udledte udtryk.

[15] Dalgaard og Pedersen (1998) viser implikationen af at skelne mellem økonomiske og skattemæssige afskrivninger.

Finansieringspolitikken kan opdeles i tre specialtilfælde: (a) fuld intern finansiering, (b) fuld gældsfinansiering og (c) fuld ekstern finansiering via aktieemissioner. User cost afhænger af hvilken metode der anvendes, og generelt skyldes forskelle afkastkrav og skattesatser. For at undgå hjørneløsninger kræves en mere detaljeret modellering af finansieringsmetodernes afkastkrav.

Fuld intern finansiering (s = b = 0):
Når investeringer finansieres via tilbageholdt overskud, findes user cost lettes via (3.18):

$$pF_K = \frac{1}{(1-t_c)}\left[(1-zt_c)\left((r_\tau+\delta)-\frac{\dot{p}_K}{p_K}\right)p_K - t_k\dot{p}_K\right] \tag{4.1}$$

Dette er en ofte anvendt specifikation, og ækvivalent til bl.a. Rasmussen (1993). Første del af den kantede parentes er den effektive omkostning til køb af en kapitalenhed.
(4.1) adskiller sig bl.a. fra Dalgaard og Pedersen (1998), samt Knudsen et al (1998), idet kapitalgevinstskatten indgår på virksomhedsniveau. Hos Dalgaard og Pedersen (1998) og Knudsen et al. (1998) indgår kapitalgevinstskatten alene i rentejusteringen, hvilket følger af ingen arbitrage betingelsen, jf. (3.1).
Hvis (3.20) alternativt anvendes er udtrykket user cost givet ved:

$$pF_K = \frac{1}{(1-t_c)}p_K\left[(1-zt_c)\left(\delta-\frac{\dot{p}_K}{p_K}\right)-zt_c r\frac{(1-t_r)}{(1-t_k)}-t_k\frac{\dot{p}_K}{p_K}\right]+p_K r\frac{(1-t_r)}{(1-t_c)(1-t_k)} \tag{4.2}$$

Ved denne specifikation er finansieringsomkostningen separeret, og derfor lettere sammenlignelig med de efterfølgende udtryk for fuld ekstern- og gældsfinansiering.

Gældsfinansiering, ingen ekstern (s = 0, b > 0):

$$\begin{aligned}pF_K = {} & \frac{1}{(1-t_c)}p_K\left[\delta-\frac{\dot{p}_K}{p_K}-zt_c\left(r\frac{(1-t_r)}{(1-t_c)(1-t_k)}+\delta-\frac{\dot{p}_K}{p_K}\right)-t_k\frac{\dot{p}_K}{p_K}\right]\\ & +p_K\left(br_B+(1-b)r\frac{(1-t_r)}{(1-t_c)(1-t_k)}\right)\end{aligned} \tag{4.3}$$

Med fuld gældsfinansiering og ingen skatter ($t_r = t_c = t_k = 0$), er finansiel omkostning lig renten på gælden, mens user cost også indrager økonomiske afskrivning og kapitalappreciering. Med skatter påvirkes finansierings-omkostningen, medmindre skattesystemet er neutralt, $(1-t_r)=(1-t_k)(1-t_c)$, så beskatning af renter og tilbageholdt udbytte er ens. Med fuld gældsfinansiering er den finansielle omkostning givet ved renten på gælden:

$$pF_K = \frac{1}{(1-t_c)}p_K\left[\delta-\frac{\dot{p}_K}{p_K}-zt_c\left(r\frac{(1-t_r)}{(1-t_c)(1-t_k)}+\delta-\frac{\dot{p}_K}{p_K}\right)-t_k\frac{\dot{p}_K}{p_K}\right]+p_K r_B \tag{4.4}$$

Hvis der ikke skelnes mellem gældens og virksomhedens rente,[16] dvs. at $r_B = r_\tau = \iota$, kan (4.3) omskrives til:

[16] Se fx Dalgaard og Pedersen (1998) og Knudsen et al. (1998).

$$pF_K = \frac{1}{(1-t_c)} p_K \left[\delta - \frac{\dot{p}_K}{p_K} - zt_c \left(\iota \frac{(1-t_r)}{(1-t_c)(1-t_k)} + \delta - \frac{\dot{p}_K}{p_K} \right) - t_k \frac{\dot{p}_K}{p_K} \right] + p_K \iota \left(b + (1-b) \frac{(1-t_r)}{(1-t_c)(1-t_k)} \right) \tag{4.5}$$

Finansiel user cost, sidste led, er ækvivalent til specifikationen der anvendes af Dalgaard og Pedersen (1998) og i DREAM modellen (Knudsen et al (1998, 92)). Afskrivningsspecifikationen adskiller sig fra DREAM's (Knudsen et al (1998, 92)), hvilket skyldes, at DREAM skelner mellem økonomiske og skattemæssige afskrivninger, mens de her antages ens (δ).

Uden skatter øges user cost med gældsandelen, hvis gældens afkastkrav er større end virksomhedens. Samme effekt opnås hvis gældsomkostningen, r_B, er stigende gældsandelen.
Med ens afkastkrav for gæld og virksomhed viser (4.5), at gældsfinansiering fortrækkes hvis:

$$(1-t_r) > (1-t_c)(1-t_k)$$

Ekstern finansiering, ingen gæld (s > 0, b = 0):
Fra (3.20) fås udtrykket for ekstern finansiering og ingen gæld (b = 0):[17]

$$pF_K = \frac{1}{(1-t_c)} p_K \left[(1-zt_c)\left(\delta - \frac{\dot{p}_K}{p_K} \right) - zt_c r \frac{(1-t_r)}{(1-t_k)} - t_k \frac{\dot{p}_K}{p_K} \right] + \frac{1}{(1-t_c)} p_K r \left(s \frac{(1-t_r)}{(1-t_p)} + (1-s) \frac{(1-t_r)}{(1-t_k)} \right) \tag{4.6}$$

(4.6) viser, at finansiering via emission er lig intern finansiering, hvis udbytter og kapitalgevinster beskattes ens. For $0 < t_p < 1$ og $t_p > t_k$, er (4.6) større end (4.2), og intern finansiering er billigst. Det skyldes at nye aktionærer kræver en "merforrentning" til dækning af udbytteskatte, og user cost er derfor stigende i udbytteskatten. Resultatet følger specificeringen af (3.9), hvor værdien af nuværende aktier mindskes med emissionsværdien, og kun øges med efter-udbytteskat emissionen. Modsat gælder, at hvis $t_p < t_k$ mindsker fremmedfinansiering user cost. Dette skyldes, at det er billigere at udbetale værdistigning som udbytte frem for kapitalgevinster, hvorfor virksomheden maksimerer værdien ved at udbetale overskud som udbytte, og finansiere nye investeringer ved aktieemissioner.

5. Virksomhedens værdi og kapitalens skyggepris.

Udgangspunkt (3.10):

[17] Appendiks D viser udledningen.

$$V_0 = \int_0^{\infty} e^{-r_\tau t} \left\{ \frac{(1-t_p)}{(1-t_k)} \left[(1-t_c)\left(pF(K,L) - wL - r_B B\right) - (1-zt_c)p_I I - t_k \dot{p}_k K + \dot{B} + \dot{S} \right] - \dot{S} \right\} dt$$

$$r_\tau = \frac{(1-t_r)r}{(1-t_k)}$$

Førsteordens betingelser:

$$\frac{m}{p_K} = \frac{(1-t_p)}{(1-t_k)} \left[(1-zt_c)p_I - (b+s) \right] + s$$

$$\frac{\dot{m}}{\dot{p}} = \left[\frac{(1-t_p)}{(1-t_k)} \left((1-zt_c) - (b+s) \right) + s \right]$$

$$\frac{\lambda}{p} = e^{-r_\tau t} \left[\frac{(1-t_p)}{(1-t_k)} \left((1-zt_c) - (b+s) \right) + s \right]$$

$$\frac{\dot{\lambda}}{p} = -\left((r_\tau - \dot{p})/p \right) e^{-r_\tau t} \left[\frac{(1-t_p)}{(1-t_k)} \left((1-zt_c) - (b+s) \right) + s \right]$$

For at fortolke relationen mellem optimale investeringer og virksomhedens værdi, opdeles afskrivninger. Værdi af nuværende og fremtidige afskrivninger på eksisterende kapitalaparat påvirkes ikke af nuværende og fremtidige investeringsbeslutninger, og kan skrives som:[18]

$$A_0 = \frac{(1-t_p)}{(1-t_k)} \int_0^{\infty} t_c \left\{ \left[\int_{-\infty}^{0} \Psi(t-v,v) p_I I_v dv \right] \cdot e^{-\int_0^t r_\tau ds} \right\} dt$$

hvor Ψ(t-v,-v) er andelen af en v perioder gammel invvestering som kan skattemæssigt afskrives i periode t. Variablen for andelen af en krone investeret i nuværende periode som kan afskrives skattemæssigt, kan skrives som:

$$t_c z_t = t_c \int_0^{\infty} \Psi(v,t) e^{-\int_0^t r_\tau ds} dv$$

Herefter er virksomhedens værdi:

$$V_0 = \int_0^{\infty} e^{-r_\tau t} \left\{ \frac{(1-t_p)}{(1-t_k)} \left[(1-t_c)\left(pF(K,L) - wL - r_B B\right) - (1-zt_c)p_I I - t_k \dot{p}_k K + \dot{B} + \dot{S} \right] - \dot{S} \right\} dt$$

$$+A_0$$

Det bemærkes at førsteordensbetingelserne og udviklingen i skyggepriserne er ækvivalente til (3.11)-(3.14).
Linket mellem q-værdi og virksomhedens værdi:

[18] Det bemærkes at investeringsprisen, p_v, antages konstant over tid.

$$\frac{V_0 - A_0}{p_k K} =$$

$$\int_0^\infty e^{-r_\tau t}\left\{\frac{(1-t_p)}{(1-t_k)}\left[(1-t_c)\frac{(pF(K,L)-wL-r_B B)}{p_k K} - \frac{(1-zt_c)p_I I}{p_k K} - \frac{t_k \dot{p}_k K}{p_k K} + \frac{\dot{B}}{p_k K} + \frac{\dot{S}}{p_k K}\right] - \frac{\dot{S}}{p_k K}\right\}dt$$

Med antagelse fra før, $p_I = p_k$:

$$\frac{V_0 - A_0}{p_k K} =$$

$$\int_0^\infty e^{-r_\tau t}\left\{\frac{(1-t_p)}{(1-t_k)}\left[(1-t_c)\frac{(pF(K,L)-p\cdot wL-p\cdot r_B B)}{pK} - \frac{(1-zt_c)I}{K} - \frac{t_k \dot{p}}{p} + \frac{\dot{B}}{p_k K} + \frac{\dot{S}}{p_k K}\right] - \frac{\dot{S}}{p_k K}\right\}dt$$

$\Leftrightarrow$

$$\frac{V_0 - A_0}{p_k K} =$$

$$\int_0^\infty e^{-r_\tau t}\left\{\frac{(1-t_p)}{(1-t_k)}\left[(1-t_c)\frac{(pF_K K-p\cdot r_B bK)}{pK} - \frac{(1-zt_c)I}{K} - \frac{t_k \dot{p}}{p} + \frac{\dot{B}}{p_k K} + \frac{\dot{S}}{p_k K}\right] - \frac{\dot{S}}{p_k K}\right\}dt$$

$\Leftrightarrow$

$$\frac{V_0 - A_0}{p_k K} =$$

$$\int_0^\infty e^{-r_\tau t}\left\{\frac{(1-t_p)}{(1-t_k)}\left[(1-t_c)(F_K - r_B b) - \frac{(1-zt_c)I}{K} - \frac{t_k \dot{p}}{p} + \frac{\dot{B}}{p_k K} + \frac{\dot{S}}{p_k K}\right] - \frac{\dot{S}}{p_k K}\right\}dt$$

$\Leftrightarrow$

$$\frac{V_0 - A_0}{p_k K} =$$

$$\int_0^\infty e^{-r_\tau t}\left\{\left[\frac{(1-t_p)}{(1-t_k)}(1-t_c)(F_K - r_B b) - \left[\frac{m}{p} + \frac{(1-t_p)}{(1-t_k)}(1-zt_c) - \frac{\lambda}{p}e^{r_\tau t}\right]\frac{I}{K} - \frac{(1-t_p)}{(1-t_k)}\left[\frac{t_k \dot{p}}{p} + \frac{\dot{B}}{pK} + \frac{\dot{S}}{pK}\right]\right] - \frac{\dot{S}}{pK}\right\}dt$$

$\Leftrightarrow$

$$\frac{V_0 - A_0}{p_k K} =$$

$$\int_0^\infty e^{-r_\tau t}\left\{\left[\frac{(1-t_p)}{(1-t_k)}(1-t_c)(F_K - r_B b) - \left[\frac{m}{p} + \frac{(1-t_p)}{(1-t_k)}(1-zt_c) - \frac{\lambda}{p}e^{r_\tau t}\right]\frac{I}{K} - \frac{(1-t_p)}{(1-t_k)}\left[\frac{t_k \dot{p}}{p} + \frac{\dot{B}}{pK} + \frac{\dot{S}}{pK}\right]\right] - \frac{\dot{S}}{pK}\right\}dt$$

$\Leftrightarrow$

$$\frac{V_0 - A_0}{p_k K} =$$

$$\int_0^\infty e^{-r_\tau t}\left\{\left[\frac{(1-t_p)}{(1-t_k)}(1-t_c)(F_K - r_B b) - \left[\frac{m}{p} + \frac{\dot{m}}{\dot{p}} + \frac{(1-t_p)}{(1-t_k)}(b+s) - s - \frac{\lambda}{p}e^{r_\tau t}\right]\frac{I}{K}\right]\right\}dt + \frac{(1-t_p)}{(1-t_k)}\left[-t_k - (s+b)\right] + s$$

$\Leftrightarrow$

$$\frac{V_0-A_0}{p_kK}=$$

$$\int_0^\infty e^{-r_\tau t}\left\{\left[\frac{(1-t_p)}{(1-t_k)}(1-t_c)(F_K-r_Bb)-\left[\frac{m}{p}+\frac{\dot{m}}{\dot{p}}+\frac{(1-t_p)}{(1-t_k)}(b+s)-s+(b+s)\frac{(1-t_p)}{(1-t_k)}-s-(1-zt_c)\frac{(1-t_p)}{(1-t_k)}\right]\frac{I}{K}\right]-\frac{(1-t_p)}{(1-t_k)}\left[t_k\frac{\dot{p}}{p}+(s+b)\left(\frac{\dot{K}}{K}+\frac{\dot{p}}{p}\right)\right]\right\}dt$$

$\Leftrightarrow$

$$\frac{V_0-A_0}{p_kK}=$$

$$\int_0^\infty e^{-r_\tau t}\left\{\left[\frac{(1-t_p)}{(1-t_k)}(1-t_c)(F_K-r_Bb)-\left[\frac{m}{p}+(b+s)\frac{(1-t_p)}{(1-t_k)}-s\right]\frac{I}{K}\right]\right\}dt+\frac{(1-t_p)}{(1-t_k)}\left[-t_k-(s+b)\right]+s$$

$\Leftrightarrow$

$$\frac{V_0-A_0}{p_kK}=$$

$$\int_0^\infty e^{-r_\tau t}\left\{\left[\frac{(1-t_p)}{(1-t_k)}(1-t_c)(F_K-r_Bb)-\left[\frac{m}{p}+\frac{(1-t_p)}{(1-t_k)}(1-zt_c)-\frac{\dot{m}}{\dot{p}}\right]\frac{I}{K}\right]\right\}dt+\frac{(1-t_p)}{(1-t_k)}\left[-t_k-(s+b)\right]+s$$

$\Leftrightarrow$

$$\frac{V_0-A_0}{p_kK}=$$

$$\int_0^\infty e^{-r_\tau t}\left\{\left[\frac{m}{p}+s\left(\frac{\dot{p}}{p}-\delta\right)+(s+b)\delta\frac{(1-t_p)}{(1-t_k)}-\left[\frac{m}{p}+\frac{(1-t_p)}{(1-t_k)}(1-zt_c)-\frac{\dot{m}}{\dot{p}}\right]\frac{I}{K}\right]-(s+b)\frac{(1-t_p)}{(1-t_k)}\left(\frac{\dot{K}}{K}\right)\right\}dt$$

$\Leftrightarrow$ i ligevægt er afskrivninger lig med investeringer, og kapitalapparatet er konstant:

$$\frac{V_0-A_0}{p_kK}=$$

$$\int_0^\infty e^{-r_\tau t}\left\{\frac{m}{p}+s\left(\frac{\dot{p}}{p}-\delta\right)-\left(\frac{m}{p}-\frac{\dot{m}}{\dot{p}}\right)\frac{I}{K}-\left[\frac{(1-t_p)}{(1-t_k)}\big((1-zt_c)-(s+b)\big)\right]\right\}dt$$

$\Leftrightarrow$

Denne skal findes:

$$\frac{m}{p_K}=\frac{(1-t_p)}{(1-t_k)}\left[(1-zt_c)-(b+s)\right]+s$$

$$\frac{\dot{m}}{\dot{p}}=\left[\frac{(1-t_p)}{(1-t_k)}\big((1-zt_c)-(b+s)\big)+s\right]\Leftrightarrow\frac{\dot{m}}{\dot{p}}+\frac{(1-t_p)}{(1-t_k)}(b+s)-s=\frac{(1-t_p)}{(1-t_k)}(1-zt_c)$$

$$\frac{(1-t_p)}{(1-t_k)}(b+s)-s=\frac{(1-t_p)}{(1-t_k)}(1-zt_c)-\frac{\dot{m}}{\dot{p}}$$

$$\left(\frac{m}{p_K}-s\right)\frac{(1-t_k)}{(1-t_p)}+(b+s)=(1-zt_c)$$

$$\frac{\dot{\lambda}}{p}=-\left(\left(r_\tau-\dot{p}\right)/p\right)e^{-r_\tau t}\left[\frac{\left(1-t_p\right)}{\left(1-t_k\right)}\left(\left(1-zt_c\right)-\left(b+s\right)\right)+s\right]$$

$$\left(b+s\right)\frac{\left(1-t_p\right)}{\left(1-t_k\right)}-s-\left(1-zt_c\right)\frac{\left(1-t_p\right)}{\left(1-t_k\right)}=-\frac{\lambda}{p}e^{r_\tau t}$$

$$\frac{\left(1-t_p\right)}{\left(1-t_k\right)}\left\{\left(1-t_c\right)F_K-r_B b+t_c r_B b-t_k\frac{\dot{p}}{p}+b\left(\frac{\dot{p}}{p}-\delta\right)+s\left(\frac{\dot{p}}{p}-\delta\right)\right\}-s\left(\frac{\dot{p}}{p}-\delta\right)=\frac{m}{p}\Leftrightarrow$$

$$\frac{\left(1-t_p\right)}{\left(1-t_k\right)}\left\{\left(1-t_c\right)\left(F_K-r_B b\right)-t_k\frac{\dot{p}}{p}+b\left(\frac{\dot{p}}{p}-\delta\right)+s\left(\frac{\dot{p}}{p}-\delta\right)\right\}-s\left(\frac{\dot{p}}{p}-\delta\right)=\frac{m}{p}\Leftrightarrow$$

$$\left(1-t_c\right)\left(F_K-r_B b\right)=\frac{m}{p}\frac{\left(1-t_k\right)}{\left(1-t_p\right)}+s\left(\frac{\dot{p}}{p}-\delta\right)\frac{\left(1-t_k\right)}{\left(1-t_p\right)}+t_k\frac{\dot{p}}{p}-b\left(\frac{\dot{p}}{p}-\delta\right)-s\left(\frac{\dot{p}}{p}-\delta\right)$$

X. Litteraturliste.

Dalgaard, C-J. og L.H. Pedersen, 1998. *A Note on User Cost and Taxes in ADAM and DREAM*. Danmarks Statistik, Modelgruppen.

Rasmussen, B.P., 1993. *Usercost-udtrykket i udbudsprojekter: Teori*. Danmarks Statistik, Modelgruppen.

Hungnes, H., 2002. *Private Investments in Norway and the User Cost of Capital*. Statistics Norway, Research Department.

Jorgenson, D.W., 1963. *Capital Theory and Investment Behavior*. American Economic Review, Vol. 53, No. 2, pp. 247-259.

Jorgenson, D.W. og J.A. Stephenson, 1967. *Investment Behavior in U.S. Manufactoring, 1947-1960*. Econometrica, Vol. 35, No. 2, pp. 169-220.

Kamian, I. og N. L. Schwartz, 1991. *Dynamic Optimization. The Calculus of Variations and optimal Control in Economics and Management*. C. J. Bliss og M.D. Intriligator (eds.), North-Holland.

Knudsen, M. B., L. H. Pedersen, T. W. Petersen, P. Stephensen og P. Trier, (1998). *Danish Rational Economic Agents Model – DREAM, version 1.2*. Danmarks Statistik.

Appendiks A.

Løsningen til nutidsværdi Hamilton funktionen er givet ved:

$$H = f\left(t,x,u\right) + m \cdot g\left(t,x,u\right) \qquad (*)$$

$$\partial H/\partial u = f_u + m \cdot g_u = 0 \qquad (**)$$

$$\dot{m} = r_\tau \cdot m - \partial H/\partial x = r_\tau \cdot m - f_x - m \cdot g_x \qquad (***)$$

I (*)-(***) er u og x kontrol- og tilstandsvariabel, f(t,x,u) er objektivfunktionen og g(t,x,u) er betingelsen der for udviklingen i tilstandsvariablen. Udviklingen i tilstandsvariablen bestemmes af kontrolvariablen, og afhænger dermed af foregående perioders handlinger. I dette tilfælde er kapitalapparatet tilstandsvariabel, og kontrolvariablen er investeringer. Virksomhedens problem er derfor at vælge den investeringsstrategi der sikrer at kapitalapparatet er lig det ønskede.

Appendiks B.

For at bestemme kapitalomkostningen, og påvirknigen af finansieringspolitikken, indsættes (3.11) og (3.12) i (3.15)

$$\frac{\left(1-t_p\right)}{\left(1-t_k\right)}\left[\left(1-zt_c\right)-\left(b+s\right)\right]\dot{p}_K + s\dot{p}_K -$$

$$\left(r_\tau+\delta\right)\frac{\left(1-t_p\right)}{\left(1-t_k\right)}\left[\left(1-zt_c\right)-\left(b+s\right)\right]p_K - \left(r_\tau+\delta\right)sp_K =$$

$$-\frac{\left(1-t_p\right)}{\left(1-t_k\right)}\left[\left(1-t_c\right)pF_K - \left(1-t_c\right)r_B bp_K - t_k\dot{p}_K + \left(b+s\right)\left(\dot{p}_K-\delta p_K\right)\right]$$

$$+s\left(\dot{p}_K-\delta p_K\right) \Leftrightarrow$$

$$\left(1-zt_c\right)\dot{p}_K - \left(b+s\right)\dot{p}_K + \frac{\left(1-t_k\right)}{\left(1-t_d\right)}s\dot{p}_K - \left(r_\tau+\delta\right)\left(1-zt_c\right)p_K +$$

$$\left(r_\tau+\delta\right)\left(b+s\right)p_K - \left(r_\tau+\delta\right)\frac{\left(1-t_k\right)}{\left(1-t_d\right)}sp_K =$$

$$-\left(1-t_c\right)pF_K + \left(1-t_c\right)r_B bp_K - t_k\dot{p}_K -$$

$$\left(b+s\right)\left(\dot{p}_K-\delta p_K\right) + \frac{s\left(\dot{p}_K-\delta p_K\right)\left(1-t_k\right)}{\left(1-t_p\right)} \Leftrightarrow$$

$$\left(1-zt_c\right)\dot{p}_K - \left(r_\tau+\delta\right)\left(1-zt_c\right)p_K + r_\tau\left(b+s\right)p_K - r_\tau\frac{\left(1-t_k\right)}{\left(1-t_p\right)}sp_K =$$

$$-\left(1-t_c\right)pF_K + \left(1-t_c\right)r_B bp_K - t_k\dot{p}_K \Leftrightarrow$$

$$\left(1-t_c\right)pF_K = -\left(1-zt_c\right)\dot{p}_K + \left(r_\tau+\delta\right)\left(1-zt_c\right)p_K - r_\tau\left(b+s\right)p_K$$

$$+ r_\tau\frac{\left(1-t_k\right)}{\left(1-t_p\right)}sp_K + \left(1-t_c\right)r_B bp_K - t_k\dot{p}_K \Leftrightarrow$$

$$
\begin{aligned}
(1-t_c)pF_K &= \left[(1-zt_c)p_K\left[(r_\tau+\delta)-\frac{\dot{p}_K}{p_K}\right]-t_k\dot{p}_K\right] \\
&\quad + bp_K\left((1-t_c)r_B - r\frac{(1-t_r)}{(1-t_k)}\right)+sp_K\left(r_\tau\frac{(1-t_k)}{(1-t_p)}-r_\tau\right)
\end{aligned}
\tag{4.10}
$$

$$
\begin{aligned}
pF_K &= \frac{1}{(1-t_c)}\left[(1-zt_c)p_K\left[(r_\tau+\delta)-\frac{\dot{p}_K}{p_K}\right]-t_k\dot{p}_K\right] \\
&\quad + bp_K\left(r_B - r\frac{(1-t_r)}{(1-t_c)(1-t_k)}\right)+\frac{sp_K}{(1-t_c)}\left(r_\tau\frac{(1-t_k)}{(1-t_p)}-r_\tau\right)
\end{aligned}
\tag{4.11}
$$

Appendiks C.

$$
\frac{1}{(1-t_c)}\left[(1-zt_c)p_K\left[(r_\tau+\delta)-\frac{\dot{p}_K}{p_K}\right]-t_k\dot{p}_K\right]\Leftrightarrow
$$

$$
\frac{1}{(1-t_c)}\left[p_K\left((r_\tau+\delta)-\frac{\dot{p}_K}{p_K}\right)-zt_cp_K\left((r_\tau+\delta)-\frac{\dot{p}_K}{p_K}\right)-t_k\dot{p}_K\right]\Leftrightarrow
$$

$$
\frac{1}{(1-t_c)}\left[p_Kr_\tau+\delta p_K-\dot{p}_K-zt_cp_Kr_\tau-zt_cp_K\delta+zt_c\dot{p}_K-t_k\dot{p}_K\right]\Leftrightarrow
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{(1-t_c)}p_K\left[\delta-\frac{\dot{p}_K}{p_K}-zt_c\left(\delta-\frac{\dot{p}_K}{p_K}\right)-t_k\frac{\dot{p}_K}{p_K}\right] \\
&-zt_cp_Kr\frac{(1-t_r)}{(1-t_c)(1-t_k)}+p_Kr\frac{(1-t_r)}{(1-t_c)(1-t_k)}
\end{aligned}
\tag{4.12}
$$

Appendiks D.

Fra (3.20) fås udtrykket for ekstern finansiering ved at sætte b = 0:

$$
pF_K=\frac{1}{(1-t_c)}p_K\left[(1-zt_c)\left(\delta-\frac{\dot{p}_K}{p_K}\right)-zt_cr\frac{(1-t_r)}{(1-t_k)}-t_k\frac{\dot{p}_K}{p_K}\right]+p_Kr\frac{(1-t_r)}{(1-t_c)(1-t_k)}\Leftrightarrow
$$

$$
\begin{aligned}
pF_K&=\frac{1}{(1-t_c)}p_K\left[(1-zt_c)\left(\delta-\frac{\dot{p}_K}{p_K}\right)-zt_cr\frac{(1-t_r)}{(1-t_k)}-t_k\frac{\dot{p}_K}{p_K}\right] \\
&\quad +p_Kr\frac{(1-t_r)}{(1-t_c)(1-t_k)}+sp_K\left(r\frac{(1-t_r)}{(1-t_c)(1-t_p)}-r\frac{(1-t_r)}{(1-t_c)(1-t_k)}\right)\Leftrightarrow
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
pF_K&=\frac{1}{(1-t_c)}p_K\left[(1-zt_c)\left(\delta-\frac{\dot{p}_K}{p_K}\right)-zt_cr\frac{(1-t_r)}{(1-t_k)}-t_k\frac{\dot{p}_K}{p_K}\right] \\
&\quad +\frac{1}{(1-t_c)}p_Kr\left(s\frac{(1-t_r)}{(1-t_p)}+(1-s)\frac{(1-t_r)}{(1-t_k)}\right)
\end{aligned}
\tag{4.13}
$$