Danmarks Statistik
MODELGRUPPEN

Arbejdspapir*

Morten Malle Pedersen

9. november 1995

CUSUMSQ-testet for strukturelle brud

Resumé:

Papiret viser konstruktionen af det såkaldte CUSUMSQ-test, der kan benyttes til test for strukturelle brud i den lineære regressionsligning uden en a priori specifikation af brud-tidspunkter. Der vises output fra en AREMOS-procedure, der udfører CUSUMSQ-testet på kontantprisrelationen, phk.

g:\mmp\papir\cusumsq.wp

Nøgleord: test, strukturelle brud, CUSUMSQ, Chow, AREMOS

1. Konstruktion af CUSUMSQ-testet

(Konstruktionen af testet kan også læses i bl.a. Harvey (1981), Johnston (1984) og Greene (1993)).

Vi er interesserede i at teste for strukturelle brud i regressionsligningen

$$y_t = \beta' x_t + e_t \ , \ e_t \sim N(0,\sigma^2) \tag{1}$$

Specifikt ønskes det testet om modellens parametre, ß og σ er konstante over estimationsperioden. Vores nulhypotesen er således:

H_0: $ß_t = ß$, $\sigma_t = \sigma$, $t = 1,..,T$

Hypotesen kan testes ved et CUSUMSQ-test, der som alternativ-hypotese har "ikke H_0". Testet kræver således ikke – som et F-test (Chow-test) – en a priori specifikation af, hvornår et strukturelt brud finder sted. Dette en *væsentlig* fordel ved testet. Til gengæld bidrager en afvisning af H_0 ikke med noget konstruktivt: Hvis H_0 afvises kan det kun konkluderes, at modellens parametre ikke er konstante over tid.

CUSUMSQ-testet konstrueres med udgangspunkt i 1-trins prediktionsfejlene fra rekursive OLS-estimatorer for ß, dvs. størrelserne:

$$e_r = y_r - x_r' b_{r-1} \ , \ b_{r-1} = (X_{r-1}' X_{r-1})^{-1} X_{r-1}' y_{r-1} \tag{2}$$

Variansen på disse er:

$$Var(e_r) = Var(y_r) + x_r' Var(b_{r-1}) x_r = \sigma^2 (1 + x_r' (X_{r-1}' X_{r-1})^{-1} x_r) \tag{3}$$

Under H_0 er variansen på de skalerede prediktionsfejl, dvs. størrelserne:

$$w_r = (1 + x_r' (X_{r-1}' X_{r-1})^{-1} x_r)^{-1/2} e_r \tag{4}$$

dermed σ^2. Under H_0 gælder det derfor, at:

$$w_r/\sigma \sim N(0,1) \ \Rightarrow \ (w_r/\sigma)^2 \sim \chi^2(1) \ \Rightarrow \ E\sum_{r=1}^{n} (w_r/\sigma)^2 = n \tag{5}$$

Specielt gælder det for CUSUMSQ-test-størrelsen:

$$S_t = \sum_{r=k+1}^{t} w_r^2 / \sum_{r=k+1}^{T} w_r^2 \ , \tag{6}$$

at $E(S_t) = (t\text{-}k)/(T\text{-}k)$, hvor k er antallet af forklarende variabler inkl. konstantled.

CUSUMSQ-testet præsenteres i lærebøgerne ved at tegne S_t op mod et konfidens-interval $E(S_t)$ +/- en kritisk værdi, c_0. c_0 er tabelleret i bl.a. Harvey (1981) og Johnston (1984) og afhænger af k og T (og test-niveau).

Modifikation

Bemærk, at CUSUMSQ-test-størrelsen udregnes fra og med $t = k+1$. Den første estimation baseres således på k observationer. Ved anvendelse af testet på kollineære tidsrækker kan det imidlertid være vanskeligt at få de initiale estimationer i hus, hvis k er lille: $X'X$ bliver (næsten) singulær med det resultat, at momentet (i praksis) ikke kan inverteres.

I ADAMs relationer er k netop lille og vi estimerer på sløve tidsrækker, så ovenstående er et reelt problem. Løsningen til dette er selvfølgelig at lægge ud med en første estimation, der er baseret på et tilstrækkeligt antal observationer til inversion af $X'X$. Det kræver dog en justering af testet. Hvis der lægges ud med $k^* \geq k$ observationer indsættes blot k^* i stedet for k i test-størrelsen, ligesom der slås op under $k = k^*$ i tabellen for de kritiske værdier.

2. Eksempel på CUSUMSQ-test

Omstående figur 1 viser CUSUMSQ-testet for kontantprisrelationen i ADAM, *phk*:

$$\begin{aligned} \ln(phk/pcp4xh) - dtphk \;=\;& \beta_0 + \beta_1(\ln(Yd9_{-1/2}/pcp4xh_{-1/2}) - \ln(Kh_{-1})) \\ &+ \beta_2 uih1 + \beta_3 Rlnae + \beta_4 \ln(phk_{-1}/pcp4xh_{-1}) \end{aligned} \qquad \textbf{(7)}$$

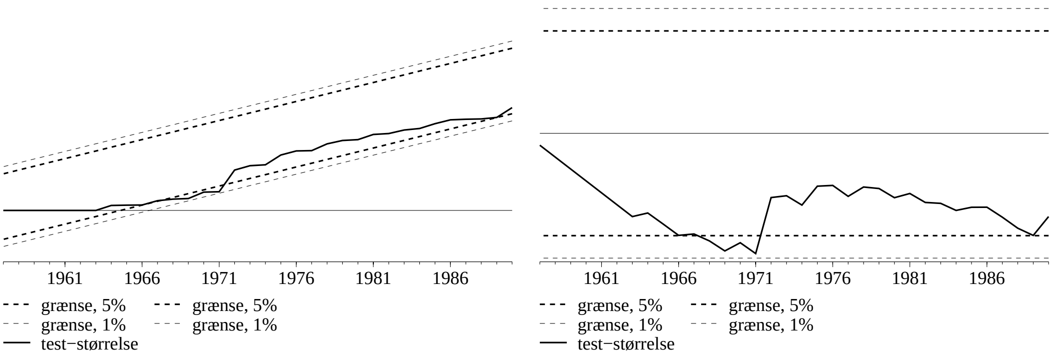
Testet er udført i AREMOS ved hjælp af en "hjemmestrikket" procedure, der beregner test-størrelse, konfidens-intervaller for test på 1% og 5% og præsenterer testet grafisk som i omstående figur 1.

I figuren viser den tykke fuldt-optrukne linie den beregnede test-størrelse, S_t. De tykke stiplede linjer afgrænser 95%-konfidens-intervallet; mens de tynde stiplede linjer afgrænser 99%-konfidens-intervallet.

I lærebøgerne præsenteres testet som i figuren til venstre. I figuren til højre er $E(S_t) = (t-k^*)/(T-k^*)$ trukket fra serierne i figuren til venstre.

Af figuren ses det, at parameter-stabilitet afvises ved test på 5%; men ikke på 1%.

Figur 1. CUSUMSQ-test for strukturelt brud i *phk*-relationen



anm: rekursiv estimation over perioden 1957-1989 med 7 observationer i første estimation.

Det kan i øvrigt bemærkes, at regressoren i *phk*-relationen lider af det nævnte kollinearitets-problem. Den initiale estimation kræver k^* = 7 observationer, selv om der kun er k = 5 parametre i relationen.