

Forholdet mellem kapitalværdi og kapitalmængde I

Resumé:

Forholdet mellem kapitalværdi og kapitalmængde indgår i ADAM, august 1997, som en eksogen variabel. Variablen fremskrives som udgangspunkt ved den seneste historiske værdi. I papiret beskrives forholdet mellem kapitalværdi og kapitalmængde i forskellige vækstforløb, og det vises at forholdet mellem kapitalværdi og kapitalmængde på langt sigt er bestemt af afgangsraten/afskrivningsraten og væksten.

Det konkluderes samtidig at i analyser med en kort tidshorisont er den seneste historiske værdi et rimeligt godt udgangspunkt, da udviklingen i kapitalværdikvoten er meget træg.

TMK22997.WP

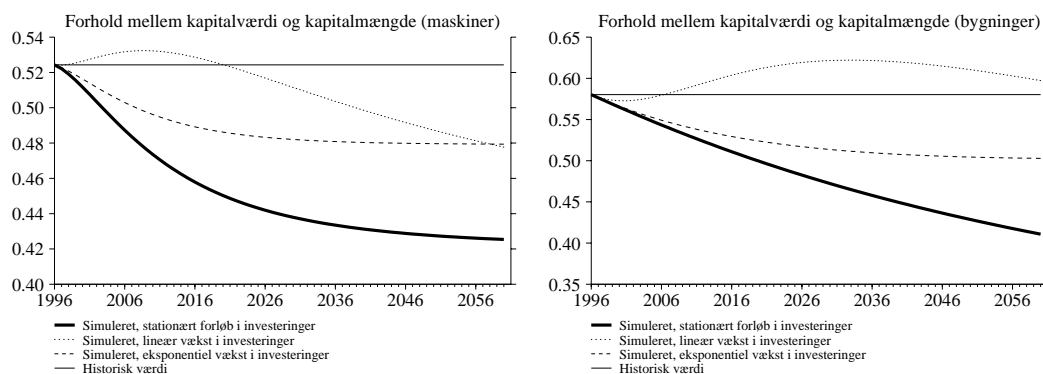
Nøgleord: bruttokapital nettokapital vækst

Modelgruppepapirer er interne arbejdsrapporter. De konklusioner, der drages i papirerne, er ikke endelige og kan være ændret inden opstillingen af nye modelversioner. Det henstilles derfor, at der kun citeres fra modelgruppepapirerne efter aftale med Danmarks Statistik.

1. Indledning

Forholdet mellem kapitalværdi og kapitalmængde indgår i usercost udtrykket og fremskrives i ADAMs databank - lige som afskrivningsraten og afgangsraten - med seneste historiske værdi. Dette kan være en ganske god approximation på kort sigt. Men simuleringer med modellen tyder på, at den seneste historiske værdi kan afvige betydeligt fra modelløsningen på langt sigt.

Figur 1. Forholdet mellem kapitalværdi og kapitalmængde under forskellige forudsætninger



Nedenfor vises at der er en sammenhæng mellem afskrivningsraten, afgangsraten og vækstraten på den ene side og kapitalværdikvoten på den anden side på langt sigt. Papiret beskriver disse resultater.

I bilaget er enkelte af de matematiske udledninger beskrevet mere detaljeret.

2. Forholdet mellem kapitalværdi og kapitalmængde i forskellige vækstforløb

Kapitalapparatet, K , må opfylde følgende dynamiske identitet

$$K_t = I_t + (1 - \alpha_t) \cdot K_{t-1} \quad (1)$$

hvor I er investeringer og α_t er afgangsraten/afskrivningsraten. Antages afgangsraten/afskrivningsraten at være konstant, kan udviklingen i kapitalapparatet beskrives således

$$K_t = \begin{cases} K_0 & t=0 \\ (1 - \alpha)^t \cdot K_0 + \sum_{j=0}^{t-1} (1 - \alpha)^j \cdot I_{t-j} & t=1,2,3,\dots \end{cases} \quad (2)$$

Forskellen mellem kapitalværdi, Kn , og kapitalmængde, K , er levetiden, hvilket afspejles i afskrivningsraten, αn , og afgangsraten, α :

$$\begin{aligned}
 Kn_t &= I_t + (1 - \alpha n_t) \cdot Kn_{t-1} \\
 K_t &= I_t + (1 - \alpha_t) \cdot K_{t-1} \\
 \text{hvor } 0 < \alpha_t < \alpha n_t < 1 \text{ og } K_t > Kn_t
 \end{aligned}
 \tag{3}$$

Forholdet mellem kapitalværdi og kapitalmængde afhænger af afskrivningsraterne og vækstforløbet. I det følgende beskrives et stationært forløb, lineær vækst og eksponentiel vækst.

Stationært forløb

Et stationært forløb i investeringerne giver på langt sigt et stationært forløb i kapitalapparatet. Da både kapitalværdi og kapitalmængde bliver stationære, så betyder det også, at forholdet mellem dem blive stationært på langt sigt.

På kort sigt vil der ske en tilpasning i kapitalapparatet til det nye investeringsniveau. Bemærk at kapitalapparatet på langt sigt er uafhængig af udgangsniveauet.

Dette ses ud fra (2). Under antagelse af stationære investeringer

$$I_t = I_0 \quad t=0,1,2,\dots \tag{4}$$

og konstant afskrivningsrate kan (2) omskrives til

$$\begin{aligned}
 K_t &= (1 - \alpha)^t \cdot K_0 + I_0 \cdot \sum_{j=0}^{t-1} (1 - \alpha)^j \\
 &= (1 - \alpha)^t \cdot K_0 + I_0 \cdot \frac{1 - (1 - \alpha)^t}{\alpha} \quad t = 1, 2, 3, \dots
 \end{aligned}
 \tag{5}$$

På langt sigt kan (5) reduceres til

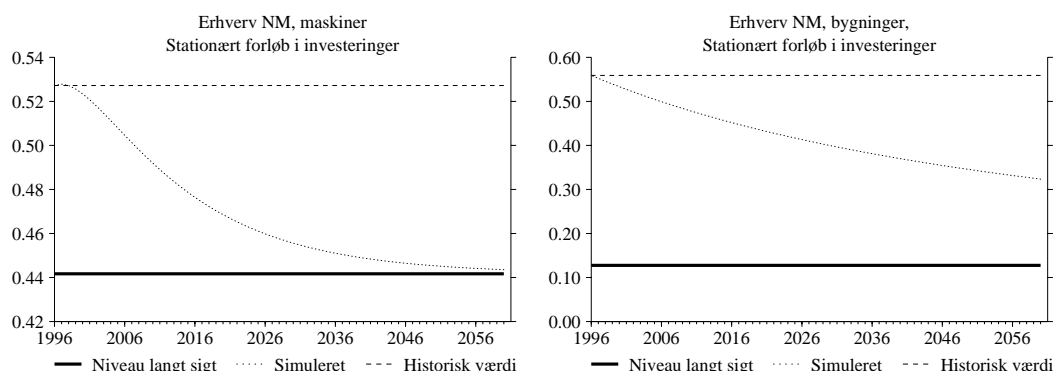
$$\lim_{t \rightarrow \infty} K_t = \frac{I_0}{\alpha} \tag{6}$$

Af (3) og (4)-(6) ses at forholdet mellem kapitalmængde og kapitalværdi ved stationære investeringer på langt sigt bliver

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{Kn_t}{K_t} = \frac{\alpha}{\alpha n} \tag{7}$$

I figur 2 er udviklingen i kapitalværdikvoten vist for *nm*-erhvervet med udgangspunkt i det seneste historiske år. Tilpasningen til niveauet på langt sigt er meget træg. Først efter 40-50 år er tilpasningen sket.¹

¹ I bilagsdelen findes figurer for alle erhverv.

Figur 2. Stationært forløb i investeringer*Lineær vækst*

Lineær vækst i investeringerne giver lineær vækst i kapitalapparatet på langt sigt. Lineær vækst i kapitalapparatet betyder, at forholdet mellem kapitalværdi og kapitalmængde på meget langt sigt bliver konstant.

Under antagelse af lineær vækst i investeringer

$$I_t = I_0 + \Delta I \cdot t \quad t=0,1,2,\dots \quad (8)$$

og konstant afskrivningsrate kan (2) omskrives til

$$\begin{aligned} K_t &= (1-\alpha)^t \cdot K_0 + I_0 \cdot \sum_{j=0}^{t-1} (1-\alpha)^j + \Delta I \cdot \sum_{j=0}^{t-1} (t-j) \cdot (1-\alpha)^j \\ &= (1-\alpha)^t \cdot K_0 + I_0 \cdot \frac{1-(1-\alpha)^t}{\alpha} \\ &\quad + \Delta I \cdot \left[t \cdot \frac{1-(1-\alpha)^t}{\alpha} - \frac{(1-\alpha) - t \cdot (1-\alpha)^t + (t-1) \cdot (1-\alpha)^{t+1}}{\alpha^2} \right] \quad t=1,2,3,\dots \end{aligned} \quad (9)$$

På meget langt sigt kan (9) approximeres til

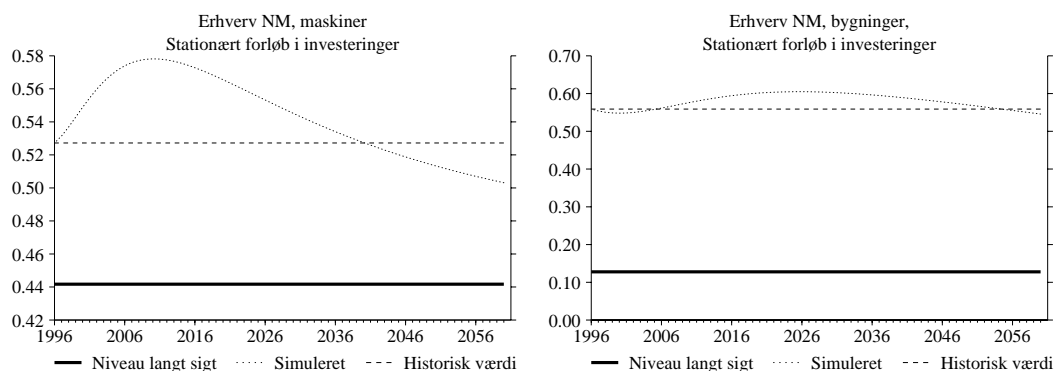
$$K_t \approx \frac{I_0 + \Delta I \cdot t - \Delta I \cdot \frac{1-\alpha}{\alpha}}{\alpha} \quad (10)$$

Af (3) og (8)-(10) ses at forholdet mellem kapitalmængde og kapitalværdi ved lineær vækst i investeringerne på meget, meget langt sigt bliver

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{Kn_t}{K_t} = \frac{\alpha}{\alpha n} \quad (11)$$

I figur 3 er udviklingen i kapitalværdikvoten igen vist for *nm*-erhvervet med udgangspunkt i det seneste historiske år. Tilpasningen til niveauet på langt sigt er meget, meget træg. Først efter 50-60 år er tilpasningen synlig.

Figur 3. Lineær vækst i investeringer



Eksponentiel vækst

Eksponentiel vækst i investeringerne giver eksponentiel vækst i kapitalapparatet på langt sigt. Også eksponentiel vækst i kapitalapparatet betyder, at forholdet mellem kapitalværdi og kapitalmængde på langt sigt bliver konstant.

Under antagelse af eksponentiel vækst i investeringer med vækstraten g

$$I_t = I_0 \cdot (1+g)^t \quad t=0,1,2,\dots \quad (12)$$

og konstant afskrivningsrate kan (2) omskrives til

$$\begin{aligned} K_t &= (1-\alpha)^t \cdot K_0 + I_0 \cdot (1+g)^t \cdot \sum_{j=0}^{t-1} \left[\frac{1-\alpha}{1+g} \right]^j \\ &= (1-\alpha)^t \cdot K_0 + I_0 \cdot (1+g)^{t+1} \cdot \frac{1 - \left[\frac{1-\alpha}{1+g} \right]^t}{\alpha+g} \quad t=1,2,3,\dots \end{aligned} \quad (13)$$

På langt sigt kan (13) approximeres til

$$K_t \approx \frac{I_0}{\alpha+g} \cdot (1+g)^{t+1} \quad (14)$$

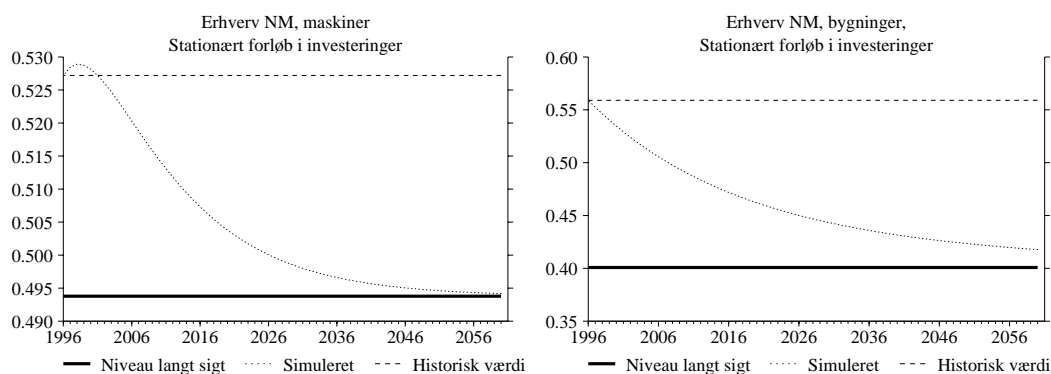
Af (3) og (12)-(14) ses at forholdet mellem kapitalmængde og kapitalværdi ved eksponentiel vækst i investeringer på langt sigt bliver

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{Kn_t}{K_t} = \frac{\alpha+g}{\alpha n+g} \quad (15)$$

Forholdet mellem kapitalværdi og kapitalmængde er i dette tilfælde afhængig af vækstraten og forskellen i afskrivningsraterne.

I figur 4 er udviklingen i kapitalværdikvoten for tredje gang vist for *nm*-erhvervet med udgangspunkt i det seneste historiske år. Konkret er der her valgt en vækstrate på 1.5 pct. Tilpasningen til niveauet på langt sigt er træg. Først efter 20-30 år er tilpasningen sket.

Figur 4. Eksponentiel vækst i investeringer



3. Opsamling

I ovenstående er beskrevet sammenhængen mellem på den ene side afskrivningsraterne i kapitalværdi og kapitalmængde og på den anden side forholdet mellem de to kapitalopgørelser i forskellige vækstforløb. Det viser sig, at forholdet mellem kapitalværdien og kapitalmængden på (meget) langt sigt alene er afhængig af afskrivningsraterne og vækstraten i forløbet. Sammenhænge var følgende

Stationært forløb i investeringerne:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{Kn_t}{Kb_t} = \frac{\alpha b}{\alpha n} \quad (16)$$

Lineær vækst i investeringerne:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{Kn_t}{Kb_t} = \frac{\alpha b}{\alpha n} \quad (17)$$

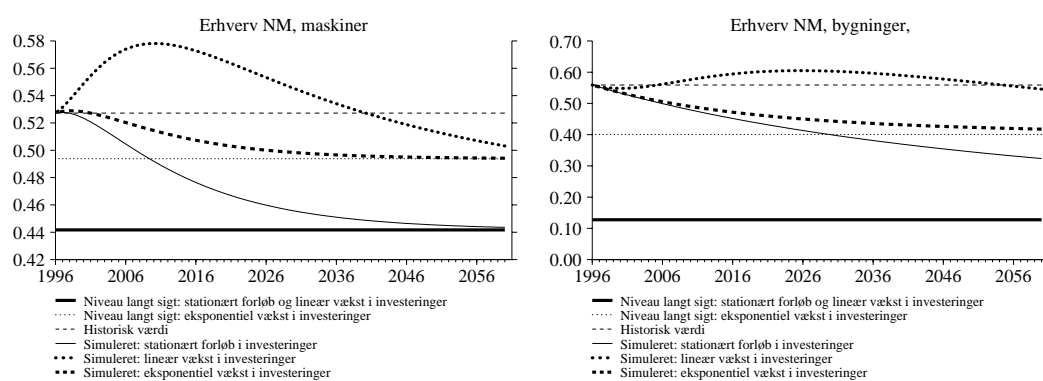
Eksponentiel vækst i investeringerne:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{Kn_t}{Kb_t} = \frac{\alpha b + g}{\alpha n + g} \quad (18)$$

I figur 4 illustreres udviklingen i kapitalværdikvoten (maskiner) i *nm*-erhvervet i de tre beskrevne vækstforløb. To konklusioner kan umiddelbart udledes af figuren. For det første kan det historiske niveau i kapitalværdikvoten afvige temmelig meget fra niveauet på langt sigt. På den anden side er tilpasningen meget træg.

Konklusionen er derfor at i analyser med en kort tidshorisont, er fejlen ved at fremskrive kapitalværdikvoten ved den seneste historiske værdi næppe særlig stor. Er tidshorisonten længere, kan der være grund til at beregne nye skøn for kapitalværdikvoten. Nye skøn for kapitalværdikvoten kan fastlægges ud fra niveauet på langt sigt, som det er beskrevet ovenfor.

Figur 5. Forhold mellem nettomaskinkapital og bruttomaskinkapital, *nm*-erhvervet



Bilag 1. Matematiske udledninger

Der er brugt følgende formler ved rækkeudvikling

$$\sum_{j=0}^{n-1} r^j = \frac{1-r^n}{1-r}$$

Hvis $-1 < r < 1$, så

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{n-1} r^j = \frac{1}{1-r} \quad (\text{A1})$$

$$\sum_{j=0}^{n-1} j r^j = \frac{r - n r^n + (n-1) r^{n+1}}{(1-r)^2}$$

Hvis $-1 < r < 1$, så

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{n-1} j r^j = \frac{r}{(1-r)^2} \quad (\text{A2})$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{n-1} (n-j) r^j &= n \sum_{j=0}^{n-1} r^j - \sum_{j=0}^{n-1} j r^j \\ &= n \frac{1-r^n}{1-r} - \frac{r - n r^n + (n-1) r^{n+1}}{(1-r)^2} \end{aligned} \quad (\text{A3})$$

Udledning af (2)

Når (1) rækkeudvikles, så fås

$$\begin{aligned} t=0 \quad K_0 &= K_0 \\ &= (1-\alpha)^0 \cdot K_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t=1 \quad K_1 &= (1-\alpha) \cdot K_0 + I_1 \\ &= (1-\alpha)^1 \cdot K_0 + (1-\alpha)^0 \cdot I_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t=2 \quad K_2 &= (1-\alpha)^2 \cdot K_0 + (1-\alpha) \cdot I_1 + I_2 \\ &= (1-\alpha)^2 \cdot K_0 + (1-\alpha)^1 \cdot I_1 + (1-\alpha)^0 \cdot I_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t=n \quad K_n &= (1-\alpha)^n \cdot K_0 + (1-\alpha)^{n-1} \cdot I_1 + (1-\alpha)^{n-2} \cdot I_2 + \dots + (1-\alpha)^0 \cdot I_n \\ &= (1-\alpha)^n \cdot K_0 + \sum_{j=0}^{n-1} (1-\alpha)^j \cdot I_{n-j} \end{aligned}$$

Udledning af (5)

(4) indsættes i (2), herved fås

$$K_t = (1 - \alpha) \cdot K_0 + I_0 \cdot \sum_{j=0}^{t-1} (1 - \alpha)^j \quad (5A)$$

Det sidste led i (5A) omskrives vha (A1)

$$\sum_{j=0}^{t-1} (1 - \alpha)^j = \frac{1 - (1 - \alpha)^t}{\alpha} \quad (5B)$$

(5B) indsættes i (5A), hvorved (5) fås

Udledning af (9)

(8) indsættes i (2), herved fås

$$K_t = (1 - \alpha)^t \cdot K_0 + I_0 \cdot \sum_{j=0}^{t-1} (1 - \alpha)^j + \Delta I \cdot \sum_{j=0}^{t-1} (t-j) \cdot (1 - \alpha)^j \quad (9A)$$

Næstsidste led i (9A) omskrives vha (A1)

$$\sum_{j=0}^{t-1} (1 - \alpha)^j = \frac{1 - (1 - \alpha)^t}{\alpha} \quad (9B)$$

Det sidste led i (9A) omskrives vha (A3)

$$\sum_{j=0}^{t-1} (t-j) \cdot (1 - \alpha)^j = t \cdot \frac{1 - (1 - \alpha)^t}{\alpha} - \frac{(1 - \alpha) - t(1 - \alpha)^t + (t-1)(1 - \alpha)^{t+1}}{\alpha^2} \quad (9C)$$

(9B) og (9C) indsættes i (9A), og herved fås (9)

Udledning af (13)

(12) indsættes i (2), herved fås

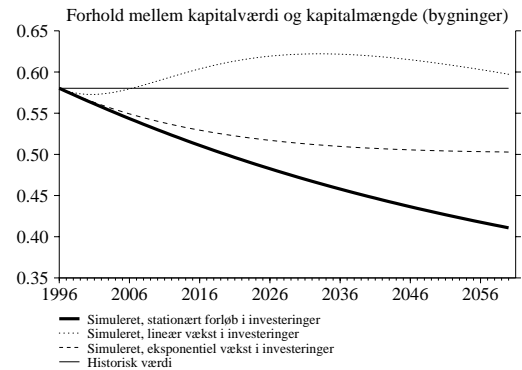
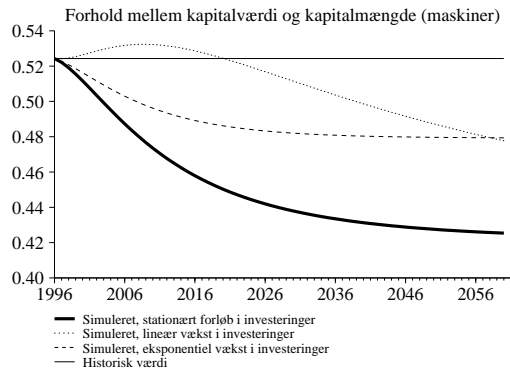
$$\begin{aligned} K_t &= (1-\alpha)^t \cdot K_0 + I_0 \cdot \sum_{j=0}^{t-1} (1-\alpha)^j \cdot (1+g)^{t-j} \\ &= (1-\alpha)^t \cdot K_0 + I_0 \cdot (1+g)^t \cdot \sum_{j=0}^{t-1} \left(\frac{1-\alpha}{1+g} \right)^j \end{aligned} \quad (13A)$$

Sidste led i (13A) omskrives vha (A1)

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{t-1} \left(\frac{1-\alpha}{1+g} \right)^j &= \frac{1 - \left(\frac{1-\alpha}{1+g} \right)^t}{1 - \left(\frac{1-\alpha}{1+g} \right)} \\ &= \frac{1 - \left(\frac{1-\alpha}{1+g} \right)^t}{\left(\frac{\alpha+g}{1+g} \right)} \\ &= (1+g) \cdot \frac{1 - \left(\frac{1-\alpha}{1+g} \right)^t}{\alpha+g} \end{aligned} \quad (13B)$$

(13B) indsættes i (13A) og herved fås (13).

Bilag 2. Kapitalværdi og kapitalmængde under forskellige forudsætninger - alle erhverv.



Erhvervene enkeltvis:

