Danmarks Statistik
MODELGRUPPEN

Arbejdspapir*

Thomas Thomsen

16. marts 2006

Törnqvistindeks og aggregeringsteori, herunder udvidelse med biased effektivitet/produktivitet

Resumé:

Papiret ligger i tæt forlængelse af TTH 15.01.06: "Effektivitetsindeks revisited", og kan med fordel opfattes som anden del af dette papir. Nærværende papir undersøger, hvordan Törnqvistindekset påvirkes af biased/forvridende tekniske trends i de indgående faktorer/inputs.

Papirets ene konklusion er, at det rent faktisk er muligt at udbygge Törnqvistindekset med bias-effekter, og principielt kan denne korrektion godt beregnes vha. en forholdsvis simpel matrix-beregning (som altid giver et entydigt resultat, hvis der ellers er frihedsgrader nok).

Den anden konklusion er imidlertid, at korrektionen i de fleste realistiske tilfælde er så lille, at det formentlig ikke er umagen værd. Korrektionen kan dog komme på tale, hvis der er store sving i de indgående priser, og her falder tanken blandt andet på oliepriserne.

Papiret lægger op til, at der i de fleste ADAM- og EMMA-anvendelser vil kunne ses bort fra trendbias-korrektion, idet det almindelige Törnqvistindeks er (stort set) lige så godt som f.eks. et "rigtigt" CES-prisindeks – også når der er tale om biased trends.

Nøgleord: Törnqvist-indeks, indeksteori, aggregering, effektivitet, teknologi, bias

1. Indledning

I papiret TTH 15.01.06 ("Effektivitetsindeks revisited") blev det vist, at man ikke taber fleksibilitet ved at parametrisere sin omkostnings- eller produktionsfunktion vha. tidsvarierende effektivitetsindeks, i forhold til den gængse måde at indbygge teknologisk bias på (f.eks. trends i omkostningsandele (translog) eller faktorintensiteter (generaliseret Leontief)). Desuden blev det i papiret vist, at der ikke nødvendigvis er noget galt i, at et eller flere effektivitetsindeks har negativ vækstrate, så længe den vægtede sum af alle effektivitsvækstrater holder sig positiv.

Da der i papiret TTH 15.01.06 blev brugt translog-omkostningsfunktionen som case, og da denne og Törnqvistindekset er nært forbundne, er det oplagt at forsøge at afdække, hvorledes effektivitetsindeks egentlig bør indgå i Törnqvistindekset. Der har tidligere været tilløb til en sådan afdækning (DGR 20.01.02), men efter denne forfatters mening var denne tilgang lidt for simplificerende.[1]

Der fokuseres i dette papir på produktionsfunktioner, men resultaterne fungerer naturligvis også for forbrugssystemer, hvor Törnqvistindekset jo også kan anvendes. Hér er spørgsmålet om indkomsteffekter (ikke-lineære ”ekspansionsveje”) imidlertid mere påtrængende.

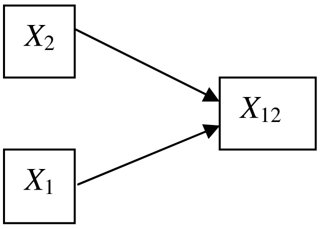
2. Ækvivalens mellem Törnqvist og translog

I produktionsfunktionen skal man forestille sig, at at aggregat $X_{12} = \mathrm{X}(X_1, X_2)$ af den ene eller anden grund ikke kan observeres, og at man ønsker at ”afsløre” denne ud fra de indgående produktionsinput; dvs. faktorpriser og faktorniveauer (P_i’er og X_i’er). Ideen i Törnqvist-indekset er, at væksten i de forskellige faktorpriser sammenvejes til en vækst i det samlede prisindeks (dvs. prisen på X_{12}). Når sidstnævnte divideres op i væksten i de samlede omkostninger (som kendes), fås et bud på væksten i X_{12}. For en relativt pædagogisk indføring i aggregerings- og indeksteori henvises i øvrigt til EMMA-bogens appendiks A.2.1.[2]

[1] I dette papir indsættes effektivitetsindeksene uden videre i selve Törnqvistformlen (ved at dividere effektiviteterne op i de indgående priser). Begrundelsen for at gøre dette er dog lidt uklar, men har nok at gøre med, at det er en gyldig måde at introducere effektivitetsindeks i omkostningsfunktioner på. Desuden er der i nævnte papir ikke helt klarhed over distinktionen mellem forvridende og ikke-forvridende effekter, herunder at Törnqvistindekset ikke er i stand til at identificere sidstnævnte.

[2] Her gennemgås Laspeyres-, Paasche, Fisher- og Törnqvist-indeksene, den generelle forskel på fastbasis- og kædeindeks samt effektivitetsindeks i den nestede CES-produktionsfunktion.

Figur 1: X_{12}-aggregatet



I Törnqvistindekset sammenvejes væksten i faktorpriserne konkret med gennemsnittet af dette og sidste års omkostningsandele. Med to faktorer:

$$\Delta\log(P_T) = \bar{s}_1\ \Delta\log(P_1) + \bar{s}_2\ \Delta\log(P_2) \qquad (1)$$

$$\bar{s}_i = \frac{s_i + s_i(\text{-}1)}{2} \qquad (2)$$

Formel (1) giver en tidsserie for Törnqvistprisindekset P_T, som man f.eks. kan vælge at normere til 1 i et givet år (f.eks. 1995). Det tilsvarende Törnqvistmængdeindeks fås nemt ved at dividere prisindekset op i de samlede omkostninger, dvs.

$$X_T = \frac{P_1 X_1 + P_2 X_2}{P_T} \qquad (3)$$

På den måde bliver produktet af mængde- og prisindeksene lig de samlede omkostninger. Det kan allerede her være værd at notere sig, at Törnqvistindekset ikke kan identificere en generel (unbiased) teknologisk udvikling, f.eks. i form af, at man år for år kan produceres det samme X_{12} med 1% mindre input af X_1 og X_2. Hvis priserne er uforandrede, vil prisindekset nemlig ikke ændre sig (jf. (1)), og mængdeindekset falder derfor også med 1% årligt (jf. (3)), hvorimod den "sande" X_{12} jo er uforandret. Vi vil senere vende tilbage til dette med at Törnqvistindekset ikke er i stand til at identificere ikke-forvridende (unbiased) tekniske trends.[3]

Vi kan nu forsøge at indsætte translogfunktionens s_1 og s_2 i (2) og se hvordan (1) bliver bestemt. Før vi gør det, vil vi dog først bemærke følgende matematiske sammenhænge:

$$\frac{(x + x_{-1})}{2}\Delta x \quad = \quad \frac{x^2 - x_{-1}^2}{2} \qquad (4)$$

$$\frac{(x + x_{-1})}{2}\Delta y + \frac{(y + y_{-1})}{2}\Delta x \quad = \quad x \cdot y - x_{-1} \cdot y_{-1} \qquad (5)$$

Translogfunktionens omkostningsandele er givet som følger (uden trends og med konstant skalaafkast), jf. TTH 15.01.06 formel (1.15):

[3] Det skal ikke forstås som om, at disse ikke-forvridende trender går fuldstændigt tabt – de vil i stedet kunne fanges op som vridende trender et niveau højere oppe i nestningsstrukturen. Se også afsnit 4.

$$s_1 \;=\; a_1 \;+\; b_{11}\;\log(P_1) - \;b_{11}\;\log(P_2) \tag{6}$$

$$s_2 \;=\; (1-a_1) + b_{11}\;\log(P_2) - \;b_{11}\;\log(P_1) \tag{7}$$

Det indebærer, at gennemsnittene over indeværende og foregående år kan skrive således:

$$\overline{s}_1 \;=\; a_1 \;+\; b_{11}\;\left[\frac{\log(P_1)+\log(P_1(-1))}{2} - \frac{\log(P_2)+\log(P_2(-1))}{2}\right] \tag{8}$$

$$\overline{s}_2 \;=\; (1-a_1) \;+\; b_{11}\;\left[\frac{\log(P_2)+\log(P_2(-1))}{2} - \frac{\log(P_1)+\log(P_1(-1))}{2}\right] \tag{9}$$

Vi indsætter nu disse i (1). Hvis man ihukommer (4) og (5), er det ikke så svært at regne ud, at (1) kan reduceres til følgende:

$$\begin{aligned}\Delta\log(P_T) &= a_1\Delta\log(P_1) + (1-a_1)\Delta\log(P_2)\\ &+\frac{1}{2}b_{11}\left[\log^2(P_1) - 2\log(P_1)\log(P_2) + \log^2(P_2)\right]\\ &-\frac{1}{2}b_{11}\left[\log^2(P_1(-1)) - 2\log(P_1(-1))\log(P_2(-1)) + \log^2(P_2(-1))\right]\end{aligned} \tag{10}$$

Vi vender nu blikket mod translog-prisindekset, som kan fås som *C*/*Y* – hvilket ud fra TTH 15.01.06 formel (1.14) giver følgende:

$$\log(P_Y) = a_0 + \sum_i a_i \log(P_i) \;+\; 0.5\sum_j\sum_i b_{ij}\log(P_i)\log(P_j) \tag{11}$$

$$\Sigma\, a_i = 1,\;\; \Sigma\, b_{ij} = 0,\;\; \Sigma\, b_{ji} = 0,\;\; b_{ij} = b_{ji}$$

Ændringerne i (11) kan skrives:

$$\begin{aligned}\Delta\log(P_Y) &= \sum_i a_i\Delta\log(P_i) \;+\; 0.5\sum_j\sum_i b_{ij}\log(P_i)\log(P_j)\\ &-\; 0.5\sum_j\sum_i b_{ij}\log(P_i(-1))\log(P_j(-1))\end{aligned} \tag{12}$$

Hvis man kigger nærmere, kan man se at $\Delta\log(P_T)$ fra (12) og $\Delta\log(P_Y)$ fra (10) er ens, altså at et Törnqvist-indeks og det sande translog-prisindeks er identiske, givet at den datagenererende proces er en translog-omkostningsfunktion uden trender og med konstant skalaafkast. Dette er her illustreret for to faktorer, men holder generelt for *n* faktorer.[4]

[4] Man skal i øvrigt også huske på, at det er de *ønskede*/optimale omkostningsandele, som teoretisk set skal bruges i Törnqvistindekset (og ikke de observerede). I de ønskede/optimale størrelser opereres der i øvrigt heller ikke med stokastiske restled. I praksis bruges dog næsten altid de observerede omkostningsandele, da hele ideen med brug af ideelle prisindeks er, at man ikke behøver at estimere noget.

Det kan måske undre, at man med den forholdsvist nemme Törnqvistformel kan få afsløret et stort antal parametre fra translog-omkostningsfunktionen (som der er mange af, når der er tale om mange faktorer/inputs). Det skal dog nævnes, at de implicitte translog-parametre, som Törnqvistindekset opererer med, kan variere kraftigt fra år til år, og for $n>2$ faktorer/inputs er parametrene rent faktisk slet ikke endegyldigt identificerede, men der er snarere tale om, at man har fået afsløret visse bånd mellem parametrene og derved fået identificeret en familier af isokvanter, som har kunnet frembringe data (og som alle giver den samme Törnqvistværdi). Læs evt. mere om, hvad der egl. foregår "inde i" Törnqvistindekset i Appendiks A.

3. Vridende trender og identifikationsproblemet

Der er desværre ikke nogen ækvivalens mellem translog-omkostningsfunktionen og et indeks à la Törnqvistindekset i det tilfælde, hvor der er vridende trender i produktionsfaktorerne.

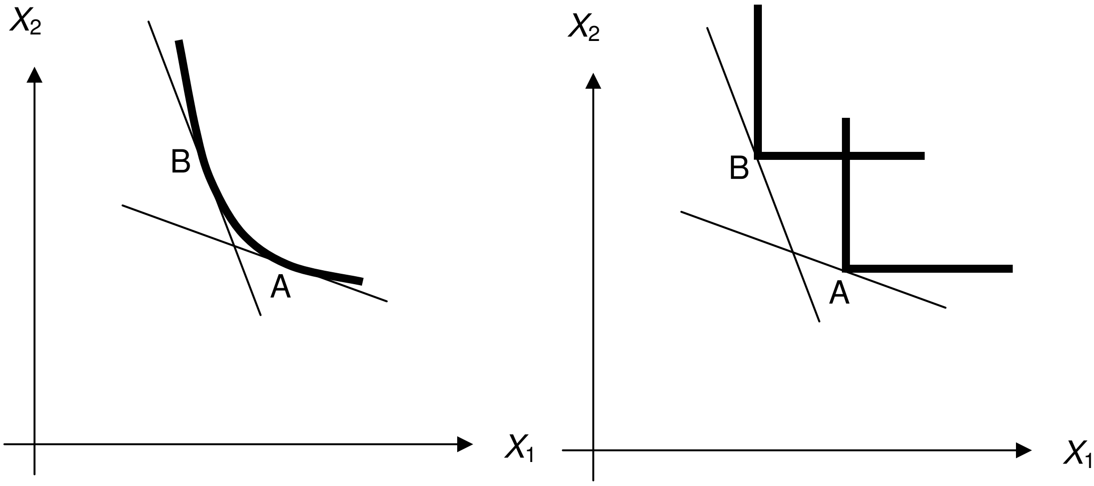
Dette vil blive forklaret i det følgende, men først skal det bemærkes, at der er tale om et helt generelt identifikationsproblem inden for indeksteorien. Diamond et al. (1978)[5] har vist, at substitutionselasticiteten og det teknologiske bias ikke kan identificeres hver for sig i et indeks af Törnqvist-typen. Dette skal dog ikke forstås økonometrisk, men på følgende måde:

Lad os sige, at man har nogle tidsserier af (X_1, X_2, P_1, P_2), og at disse passer med en produktionsfunktion (med konstant skalaafkast) med $\sigma = \sigma_1$ uden vridende effektivitetsindeks. For argumentets skyld kan vi antage, at observationerne passer præcist, dvs. uden residualer. Diamond et al. viser så, at præcis de samme observationer kunne genereres vha. en produktionsfunktion med en arbitrær anderledes $\sigma = \sigma_2 \neq \sigma_1$, parret med passende tidsserier for de (vridende) effektivitetsindeks.

Lad os f.eks. sige, at vi har de to punkter A og B i to forskellige tidsperioder (og med forskellige relative priser).

[5] *Measurement of the elasticity of factor substitution and bias of technical change*, http://elsa.berkeley.edu/prodecon/apps/ch12.pdf

Figur 2. Identifikationsproblemet i indeksteorien



Punkterne A og B og tilhørende relative faktorpriser (hældning på isokostlinjerne gennem de to punkter) kunne f.eks. være fremkommet ud fra isokvanten i den venstre del af figuren. Hvis der tillades vridende trender, som kan flytte isokvanterne i andre retninger end langs en stråle mod origo, er det imidlertid ikke længere til at finde ud af, om det er de relative priser eller trenderne, som har skabt bevægelsen fra A til B. For som det er vist i den højre del af figuren, kunne observationerne lige så godt være resultat af en Leontief-isokvant ($\sigma = 0$), som har flyttet sig over tid (dvs. fra situation A til B) som følge af en vridende trend.

Det skal pointeres, at der her ikke er tale om "normale" effektivitetsindeks, men om effektivitetsindeks, som kan ændre sig helt arbitrært fra år til år. Så snart man pålægger en funktionsform $e_i = \mathrm{e_i}(t)$ på effektivitetsindeksene, kan man godt *estimere* både σ og effektivitet/bias ud fra tidsserier, men man kan altså ikke udlede både σ og bias uafhængigt af hinanden ud fra kun to observationer A og B.

4. Ekskurs: hvordan fortolke ikke-forvridende trends?

Det lønner sig før vi går videre at se lidt nærmere på trendspecifikationer i translog-funktionen.

I den første udgave kan vi betragte en standard-translog med konstant skalaafkast (TL1):[6]

TL1:

$$\log(C) = a_0 + \log(Y) + \sum_i a_i \log(P_i) \; + \; 0.5\sum_j \sum_i b_{ij} \log(P_i)\log(P_j)$$
$$+ \sum_i b_{ti} t \log(P_i) + \; a_t t + 0.5 a_{tt} t^2 \qquad (13)$$

$$s_i \; = \; a_i \; + \; \sum_j b_{ij} \; \log(P_j) \;\; + \; b_{ti} t \qquad (14)$$

Som alternativ kan man forestille sig en translog med konstant skalaafkast, hvor trendeffekterne er bygget ind vha. effektivitetsindeks (TL2):[7]

TL2:

$$\log(C) = a_0 + \log(Y) + \sum_i a_i \log\left(\frac{P_i}{e_i}\right) \; + \; 0.5\sum_j \sum_i b_{ij} \log\left(\frac{P_i}{e_i}\right)\log\left(\frac{P_j}{e_j}\right) \qquad (15)$$

$$s_i \; = \; a_i \; + \; \sum_j b_{ij} \; \log\left(\frac{P_j}{e_j}\right) \qquad (16)$$

$$\log(e_i) = \omega_i t + 0.5\,\overline{\omega} t^2 \qquad (17)$$

Som det er vist i TTH 15.01.06 er der fuldstændig matematisk identitet mellem de to systemer (13)-(14) på den ene side og (15)-(17) på den anden side, og begge systemer har da også samme antal frie parametre.

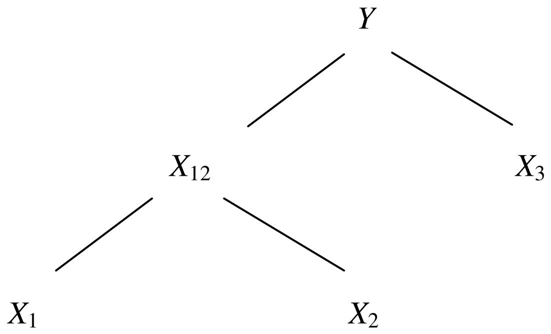
Vi forestiller os nu en nestet translog med en TL1-formulering (standard) i nederste nest, og en TL2-formulering (effektivitetsindeks) i øverste nest.

---

[6] Hvor der gælder, at $\Sigma\, a_i = 1$, $\Sigma\, b_{ij} = 0$, $\Sigma\, b_{ji} = 0$, $b_{ij} = b_{ji}$, $\Sigma\, b_{ti} = 0$

[7] Hvor der gælder, at $\Sigma\, a_i = 1$, $\Sigma\, b_{ij} = 0$, $\Sigma\, b_{ji} = 0$, $b_{ij} = b_{ji}$

Figur 3. Sammenhænge mellem parametre i TL1 og TL2



Parameter i øverste nest: ω_1
Parameter i nederste nest: a_t

Der vil så gælde følgende:

- Hvis a_t ændrer sig med 0.01 i nederste nest, er dette identisk med at ω_1 ændrer sig med –0.01 i det øverste nest (faktor 1 i det øverste nest er X_{12}-aggregatet).

Grunden til dette er, at a_t er ikke-forvridende og derfor kan opfattes som en overordnet trend på selve aggregatet, og ω_1 jo effektivitetskorrektion af samme aggregat – blot et niveau højere oppe i nestningsstrukturen.

En anden måde at sige dette på er, at det er umuligt i én og samme estimation at få identificeret en overordnet trend a_t i det nederste nest, og en faktorudvidende trend på X_{12}-aggregatet i det øverste nest. De to slags trends har nøjagtigt samme funktionalitet, så den ene er overflødig.

Hvis man skal estimere et sådant nestet system, er det således ikke nødvendigt at have a_t med i det nederste nest, da effekten vil blive fanget vha. ω_1 i det øverste nest. En helt tilsvarende ækvivalens gælder selvfølgelig mellem a_{tt} i det nederste nest og det kvadratiske trendled i (17).[8]

Hvis man ønsker at læse mere om skaleringer i translog-omkostningsfunktionen (TL1- eller TL2-udgaven) henvises i øvrigt til Appendiks B.

---

[8] Givet at parametrene til det kvadratiske led ikke er bundet til at være ens.

5. Det "sande" Törnqvist-indeks med biased trends

Vi vil nu se på, hvordan Törnqvistindekset teoretisk set skal korrigeres for at tage højde for vridende trender i de indgående faktorer. Vi begynder med det "sande" prisindeks, P_Y. Der holdes stadigvæk fast i antagelsen om konstant skalaafkast, men (11) udvides nu med trendleddene i TTH 15.01.06 formel (1.6). Dermed udvides (11) til følgende:

$$\log(P_Y) = a_0 + \sum_i a_i \log(P_i) \;+\; 0.5\sum_j \sum_i b_{ij} \log(P_i)\log(P_j)$$
$$+\sum_i b_{ti} t \log(P_i) \quad + a_t t \;+ 0.5 a_{tt} t^2 \qquad (18)$$

Tidsændringerne i dette indeks er givet som:

$$\Delta\log(P_Y) = \;(12) \qquad + \sum_i b_{ti} t\, \Delta\log(P_i) \;+ \sum_i b_{ti} \log(P_i(-1)) \quad + a_t \;+ a_{tt}(t-0.5) \qquad (19)$$

Denne formel skal så sammenlignes med ændringerne i Törnqvistprisindekset, som jo er givet som (1). I sidstnævnte skal man dog huske, at omkostningsandelene nu inkluderer et trendled, $b_t\, t$. Altså skal (6) tillægges b_t $(t–1)$ og (7) fratrækkes b_t $(t–1)$. Disse nye $\overline{s}$ indsættes i (1), hvorefter vi får:[9]

$$\Delta\log(P_T) = (10) \qquad + b_{t1}(t-0.5)[\Delta\log(P_1) - \Delta\log(P_2)] \qquad (20)$$

Man kan nu trække (19) og (20) fra hinanden, hvorved der efter nogen beregning fås:

$$\Delta\log(P_Y) = \Delta\log(P_T) + a_t + a_{tt}(t-0.5) + b_{t1}\log(P_1 / P_2)_{-0.5}$$

hvor $\log(x)_{-0.5} = \quad [\log(x) + \log(x(-1))]/2$ (21)

Det ses af denne formel, at vækstraten i et "naivt" Törnqvistindeks (P_T) uden trendkorrektion dels rammer forkert pga. de ikke-forvridende bidrag fra a_t og a_{tt} (som afhænger af *t* alene), og dels pga. det forvridende bidrag fra b_{t1} (som afhænger af *niveauet* for det relative faktorprisforhold – lagget en halv periode).

Bidragene fra a_t og a_{tt} er ikke-forvridende og derfor uproblematiske. Sådanne ikke-forvridende trender (dvs. parametrene a_t og a_{tt}) vil altid kunne fanges op som faktorudvidende bias et niveau længere oppe i nestningsstrukturen, hvilket blev vist i afsnit 4. Af den grund kan de ignoreres, så vi kan skrive det bias-korrigerede Törnqvistindeks (P_{Tbias}) som følger:

$$\Delta\log(P_{Tbias}) = \Delta\log(P_T) + b_{t1}\log(P_1 / P_2)_{-0.5} \qquad (22)$$

[9] Bemærk: der er ikke her tale om, at Törnqvistindekset trendkorrigeres på nogen måde. Det er stadigvæk et helt "naivt" indeks, fordi der blot indsættes omkostningsandele fra den datagenererende proces (som nu er trendafhængig).

Eller i den generelle form for n faktorer:

$$\Delta\log(P_{Tbias}) = \Delta\log(P_T) + \sum_i b_{ti}\log(P_i)_{-0.5} \qquad (23)$$

idet det som altid huskes, at b_{ti}'erne summer til 0.

I formel (22) er man nødt til at kende størrelsen af b_{t1}, for at kunne få Törnqvistformlen korrigeret. Så man kommer ikke uden om at måtte *estimere* b_{t1} på en eller anden måde, med mindre man på forhånd ved, hvad den er.

Hvis der tillades vridende skalaeffekter, kan man i øvrigt ud fra en helt analog analyse vise, at (23) skal udvides med det ekstra led $\sum_i b_{yi}\,\mathrm{Dlog}(Y)\log(P_i)_{-0.5}$.

[skal tjekkes].

6. OLS-estimation af det bias-korrigerede Törnqvistindeks

I det følgende afsnit 7 vil der blive argumenteret for, at bias-korrektionen af Törnqvistindekset i de fleste tilfælde ikke har den store praktiske betydning. Alligevel kan det være interessant at se på, hvordan man på en forholdsvis nem måde kan biaskorrigere vha. simpel OLS (hvilket igen vil sige forholdsvist simple matrix-operationer). Som vist i afsnit 3 er det nødvendigt med økonometrisk analyse/regression over en række observationer, for det er ikke muligt at identificere både substitution og bias for et givet par af observationer t–1 og t.

Hvis der kun er to faktorer, kan trenden i s_1-omkostningsandelen bt_1 estimeres med OLS ud fra følgende ligning (jf. TTH 15.01.06, formel (1.7) med b_{yi} sat til 0):

$$s_1 = a_1 + b_{11}\log(P_1/P_2) + b_{t1}t \qquad (24)$$

Med $n > 2$ faktorer bliver det lidt sværere, men det kan være interessant at nævne, at b_{ti}'erne stadig godt kan estimeres vha. simpel OLS. Hvis f.eks. $n = 3$, kan omkostningsandelene skrives som:

$$\begin{pmatrix}\mathbf{s}_1\\ \mathbf{s}_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{0} & (\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_3) & \mathbf{0} & (\mathbf{p}_2-\mathbf{p}_3) & \mathbf{t} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & (\mathbf{p}_2-\mathbf{p}_3) & (\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_3) & \mathbf{0} & \mathbf{t}\end{pmatrix}\boldsymbol{\beta} \quad , \qquad (25)$$

hvor $\mathbf{s}_i$ er vektorer med omkostningsandele, $\mathbf{p}_i$ er vektorer med priser (i logaritmer), $\mathbf{t}$ er en vektor med tidsindekset, **1** og **0** er vektorer med 1'er hhv. 0'er, og $\boldsymbol{\beta} = (a_1, a_2, b_{11}, b_{22}, b_{12}, b_{t1}, b_{t2})$. Ved at skrive systemet op på denne måde får man automatisk pålagt krydsrestriktionerne på b_{ij}, og derfor kan systemet estimeres med OLS. Denne simple estimator forudsætter, at restleddenes spredning er ens (og uafhængig) for s_1 og s_2, hvilket man godt kan leve med for på en så simpel måde at kunne beregne b_{ti}'erne.[10]

Ud fra en sådan estimation af b_{ti}'erne kan man så bagefter udregne det trendkorrigerede Törnqvist-indeks (23). Man kan hér diskutere, om der i denne beregning skal bruges de observerede omkostningsandele, eller de beregnede/fittede omkostningsandele fra OLS-estimationen. Det sidste er nok det mest efficiente rent økonometrisk set, men asymptotisk giver det formentlig ikke nogen forskel.

Det skal pointeres, at der i OLS-biaskorrektionen naturligvis er en grænse for, hvor mange produktionsfaktorer man kan operere med for et givet antal observationer. Da antallet af parametre ca. er proportionalt med kvadratet på antallet af faktorer, vil b_t-parametrene bliver mere og mere ubestemte (og man vil før eller siden løbe helt tør for frihedsgrader), efterhånden som man introducerer flere og flere faktorer. OLS-biaskorrektionen er således umiddelbart tænkt til at biaskorrigere med 4-5 faktorer eller mindre.

Hvis der er interesse for det, kunne man forholdsvist nemt lave en AREMOS-procedure, som beregner det biaskorrigerede Törnqvistindeks ud fra matricer af typen (25). Som biprodukt af en sådan procedure ville man bl.a. kunne få vist partielle priselasticiteter samt trends i omkostningsandele, så det må siges at være en potentielt nem og robust måde at få vist et hurtigt bud på substitutionsforholdene mellem et antal produktionsfaktorer.

7. Trend-korrektion af Törnqvist-indekset: betyder det noget?

Som allerede antydet i foregående afsnit bliver korrektionen for den vridende effekt i praksis ret beskeden, hvilket bliver begrundet i det følgende. Idet vi husker, at eventuelle ikke-vridende trender (fra a_t og a_{tt}) fanges op som effektivitetsbias i et højere nest (jf. afsnit 4), er det denne formel, som er relevant:

$$\Delta\log(P_Y) = \Delta\log(P_T) + b_{t1}\log(P_1 / P_2)_{-0.5} \qquad (26)$$

Som tilnærmelsesvist (nemlig givet at omkostningsandelene ikke ændrer sig ret meget) kan omskrives til:

$$\Delta\log(P_Y) = \alpha\,\Delta p_1 + (1-\alpha)\,\Delta p_2 + \beta\,(p_1 - p_2)_{-0.5} \qquad (27)$$

hvor α er faktor 1's omkostningsandel, og hvor β er det antal procentpoints, som faktor 1's omkostningsandel stiger trendmæssigt med årligt.

Hvis vi for eksempel antager, at p_1 og p_2 er IID ~ N(0,1), vil de to første led tilsammen være $N(0, 2\alpha^2+2(1-\alpha)^2)$, mens det sidste led vil være $N(0, 2\beta^2)$.

[10] Det er ligegyldigt for parameterestimaterne hvilken af s-ligningerne man udnævner til residual (her s_3), jf. Barten (1969): "Maximum Likelihood Estimation of a Complete System of Demand Equations", *European Economic Review*.

Altså har de to første led en spredning på $\sqrt{(2\alpha^2+2(1-\alpha)^2)}$, hvilket vil ligge mellem 1 og 1.41, mens det sidste led har en spredning på $\sqrt{2}\beta$. Hvis β f.eks. estimeres til 0.005, svarende til en relativt kraftig stigning på 0.5%-points årligt, bliver spredningen på det sidste led beskedne 0.007. Spredningen på det sidste led er altså over 100 gange mindre end spredningen på de to første led. For rimelige vridende trender (lad os rundhåndet sige max 2%-points årligt svarende til 80%-points over 40 år), vil det sidste led for prakiske formål drukne i støjen fra de to første led.

Det er imidlertid klart, at man kan invalidere ovenstående konklusion ved at åbne op for, at *p*'erne er ikke-stationære. Eller mere præcist at forholdet (p_1–p_2) svarende til $\log(P_1/P_2)$ udvikler sig trendmæssigt, svarende til at der er en tilpas kraftig trend i den relative pris. I så fald kan det sidste led i (27) få betydning, da det jo er et niveau-led – selvfølgelig givet at vriddet i de relative priser samt bt_1 begge er store nok. Det skal i den forbindelse pointeres, at med f.eks. 40 observationer er det vanskeligt at få nogen særlig bias-effekt. Hvis vi siger, at bt_1 er 0.005 (hvilket er pænt stort), og at den relative pris ændrer sig med 2% årligt (hvilket ligeledes er pænt stort), vil P_1/P_2 ændre sig med en faktor 2.2 og $\log(P_1/P_2)$ dermed med 0.79 over de 40 år. Bidraget fra $bt_1 \cdot \log(P_1/P_2)$ vil altså ændre sig med 0.004 (svarende til en samlet stigning i Törnqvistprisindekset på 0.4%) over de 40 år, hvilket stadig nemt kan drukne i støjen fra de to første led, med mindre disse har ret lille spredning.[11]

Vi kan konkludere følgende:

Konklusion 1
Hvis de relative priser er forholdsvist stationære, og hvis eventuelle biased/vridende trender ligger inde for ædruelige grænser, vil korrektion for dette ikke have synlig effekt i et bias-korrigeret Törnqvistindeks.

Selv hvis de relative priser udvikler sig ikke-stationært, vil dette typisk være af ret lille betydning i et bias-korrigeret Törnqvistindeks, hvis der f.eks. kun opereres med 40 observationer og prisændringer og trendeffekter ligger inden for ædruelige grænser.

Anm: Oliepriser kan dog være en undtagelse fra denne generelle konklusion, jf. afsnit 9.

Man kan i øvrigt undre sig lidt over hvad der sker, hvis priserne i det sidste led i (23) ikke er ens i et basisår (f.eks. 1995), men har forskelligt niveau. Hvis f.eks. P_1 ganges med 100 (og X_1 divideres med 100), vil dette ikke påvirke estimationen af b_{t1}, og derfor vil det bias-korrigerede Törnqvistindeks have en højere vækstrate, end hvis prisen ikke var blevet ganget med 100.

Dette kan lyde mærkeligt, og forklaringen er, at parameteren a_t fanger dette, og at det fuldt trendkorrigerede Törnqvistindeks (21) således er uforandret (idet a_t ændrer sig). Der gælder som det blev vist i afsnit 4, at en ændret a_t kan fanges

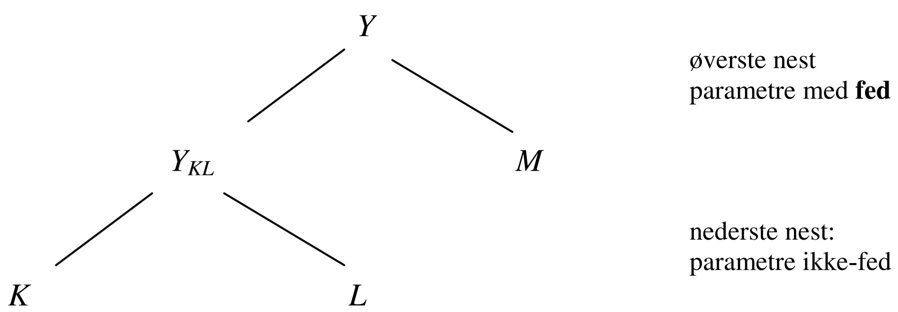
[11] Her er der så en økonometrisk pekuliaritet, nemlig at hvis det relative faktorprisforhold virkelig udvikler sig *helt* trendmæssigt, vil det ikke være muligt at identificere hvad der er priselasticiteten (b_{11}) og hvad der er trenden (bt_1) i ligningen for faktor 1's omkostningsandel (24).

af en ændret ω_1 i et højere nest, så selv om det bias-korrigerede Törnqvistindeks har en højere vækstrate når P_1 ganges med 100, vil dette blive fanget af trendparametrene (konkret: ω_1) i det øverste nest. Det anbefales dog generelt at sætte alle priser (inklusive Törnqvistindekset) lig 1 i et givet basisår (f.eks. 1995), af hensyn til parametrene fortolkelighed. Se også Appendiks B vedrørende skaleringer i translog-omkostningsfunktionen.

8. Illustrativ estimation i ét og to trin

For at illustrere resultaterne i de foregående afsnit estimereres i det følgende en nestet translog, hvor K og L estimeres i det nederste nest, og materialeforbruget M estimeres sammen med KL-aggregatet i det øverste nest. For at kunne skelne nemt mellem parametre fra de to nests, skrives alle parametrene ud med bogstaver (f.eks. `OMEGABAR` i stedet for $\overline{\omega}$), og fed skrift indikerer parametre fra det øverste nest.

Figur 1. Nestningsstruktur



Estimeres den nestede ((KL)M) i ét trin, fås følgende parametre (der estimeres standard-translog, svarende til TL1 i afsnit 4):

```
Number of observations = 31        Log likelihood = 194.673
        Schwarz B.I.C. = -177.503
```

Parameter	Estimate	Standard Error	t-statistic	P-value
A1	.158210	.189571E-02	83.4571	[.000]
B11	.063446	.466854E-02	13.5902	[.000]
BT1	.457453E-02	.140263E-03	32.6140	[.000]
AT	.145970	.076513	1.90776	[.056]
ATT	.016566	.760387E-02	2.17859	[.029]
A0	11.7488	.465619E-02	2523.27	[.000]
A1	.415854	.359535E-02	115.665	[.000]
B11	-.921650E-02	.542404E-02	-1.69919	[.089]
AT	-.066084	.032288	-2.04671	[.041]
ATT	-.639996E-02	.325574E-02	-1.96574	[.049]

Det ses her, at `A0` i nederste nest er udeladt (sat til 0), da denne skaleringsvariabel ikke ville kunne identificeres (*niveauet* for den KL-variabel, som indgår i det øverste nest, er ligegyldigt, da translog-funktionen er skala-invariant). Desuden er der pålagt den nødvendige restriktion

BT1 = –**B11**/(1–**A1**) · **AT** i det øverste nest, hvilket svarer til at sætte **OMEGA1** = 0 hvis der var tale om effektivitets-udgaven (benævnt TL2 i afsnit 4).[12] Parameteren **OMEGA1** er det lineære trendled i effektivitetsindekset for faktor 1 i øverste nest (dvs. Y_{KL}-aggregatet), og en given ændring i **OMEGA1** ville altid kunne modposteres eksakt i AT i det nederste nest (se mere om dette i afsnit 4). Men bortset fra disse to manglende parametre, A0 og **BT1**, er alle translog-parametrene med.

Estimeres ligningerne med effektivitetsindeks i stedet, fås følgende:

```
Number of observations = 31        Log likelihood = 194.673
        Schwarz B.I.C. = -177.503
```

Parameter	Estimate	Standard Error	t-statistic	P-value
A1	.158210	.189571E-02	83.4571	[.000]
B11	.063446	.466854E-02	13.5902	[.000]
OMEGA1	-.206663	.077761	-2.65767	[.008]
OMEGA2	-.134562	.076286	-1.76392	[.078]
OMEGABAR	-.016236	.759499E-02	-2.13771	[.033]
A0	11.7488	.465619E-02	2523.27	[.000]
A1	.415854	.359535E-02	115.665	[.000]
B11	-.921650E-02	.542404E-02	-1.69919	[.089]
OMEGA2	.113130	.055399	2.04211	[.041]
OMEGABAR	.628200E-02	.320557E-02	1.95972	[.050]

Her er A0 = 0 og **OMEGA1** = 0. Likelihoodværdien er den samme som før, hvilket også gælder de fem ikke-OMEGA-variabler.

Det egentligt interessante kommer nu, hvor vi vil forsøge at estimere de to ligninger i to uafhængige trin. For ikke på nuværende tidspunkt at indblande spørgsmålet om stokastiske restled, er der som data for *K*, *L* og *M* brugt de fittede/beregnede værdier fra et-trinsestimationen.

Først estimeres standard-translog'en, hvor der kun estimeres parametrene i ligningen for omkostningsandelene (A0, AT og ATT udelades).

To-trins: trin 1

Parameter	Estimate	Standard Error	t-statistic	P-value
A1	.158210	.916112E-08	.172698E+08	[.000]
B11	.063446	.560062E-07	.113285E+07	[.000]
BT1	.457453E-02	.117018E-08	.390927E+07	[.000]

Dette er en OLS-estimation af en translog-omkostningsandelsligning. Det ses, at man som forventet får et perfekt fit, og parametrene er præcis de samme som i ettrins-estimationen. Nu genereres så et Törnqvistindeks vha. den estimerede b_{t1} indsat i formel (22), og dette bruges som P_{KL}, mens Y_{KL} fås som $(P_K K + P_L L)/P_{KL}$.

[12] Restriktionen fås ved at dividere (1.26) med (1.28) i TTH15.01.06 for $\omega_1 = 0$. Udelades restriktionen, går TSP ned med en meddelelse om perfekt multikollinearitet.

To-trins: trin 2

Parameter	Estimate	Standard Error	t-statistic	P-value
A0	11.7488	.707933E-07	.165960E+09	[.000]
A1	.415855	.272536E-07	.152587E+08	[.000]
B11	-.921660E-02	.734010E-07	-125565.	[.000]
OMEGA1	-.145967	.114638E-05	-127329.	[.000]
OMEGA2	.113129	.830104E-06	136282.	[.000]
OMEGABAR1	-.010284	.638121E-07	-161154.	[.000]
OMEGABAR2	.628192E-02	.459979E-07	136570.	[.000]

I trin to bruges nu effektivitetsformuleringen (TL2), da det er nødvendigt at ophæve restriktionen om, at andenordens-leddene i de to ligninger er ens (forklaring følger). Det ses, at vi i trin to får nøjagtigt samme **A0**, **A1** og **B11** som i den oprindelige ettrins-estimation, og fittet er perfekt, idet R^2 for de to ligninger er 1.000000 hhv. 1.000000. Mht. OMEGA-parametrene er der flg. sammenhænge til et-trinsestimationen: **OMEGA1** = –AT og **OMEGABAR1**–**OMEGABAR2** = –ATT. Desuden gælder der, at **OMEGA2** er som i ettrinsestimationen, mens **OMEGABAR2** er lig OMEGABAR fra ettrinsestimationen.

Grunden til, at det er nødvendigt at ophøve restriktionen på andenordens-trendleddene i trin 2 er, at **OMEGABAR1** bruges til at fange den overordnede omkostningstrend i trin ét (ATT). Da ATT ikke estimeres i trin 1 må **OMEGABAR1** overtage dette arbejde i trin 2, og **OMEGABAR1** er i den forstand bundet. Så i realiteten estimeres kun én andenordenstrend i trin 2 (nemlig **OMEGABAR2**), selv om det kan se anderledes ud for en umiddelbar betragtning.

9. Eksempler på Törnqvistindeks

<afsnit ikke skrevet>
<generelt mangler papiret grafer/illustrationer>
<måske bider biaskorrektionen, når der indgår oliepriser? >

10. Konklusion

Papiret viser, at det i de fleste realistiske tilfælde ikke er umagen værd at bias-korrigere Törnqvistindekset, da der alligevel fås tæt på det samme som med det almindelige Törnqvistindeks. I hvert fald givet at der er tale om ca. 40 observationer og de relative faktorpriser holder sig inden for ædruelige grænser

Givet at man apriori pålægger en nestningsstruktur på sin produktionsfunktion, kan denne forfatter derfor ikke se noget galt i, at man bruger det almindelige Törnqvistindekset til at få dannet et mængdeaggregat vedr. det nederste nestningsniveau, til brug for estimation af det øverste nestningsniveau.

Ved at gøre dette begår man ganske vist en teoretisk fejl, i forhold til f.eks. at udregne et "rigtigt" CES-indeks. Fejlen består af flere komponenter, herunder

1. Manglende korrektion for biased trends
2. Manglende brug af langsigtede/ønskede omkostningsandele
3. Stokastisk støj i de observerede omkostningsandele

Mht. 1 blev det i afsnit 7 vist, at denne korrektion i de fleste tilfælde er så lille, at den ikke er ulejligheden værd.

Mht. 2 og 3 skal man når man bruger Törnqvistindekset være klar over, at dets ideale egenskaber kun gælder, når omkostningsandelene er konsistente med den bagvedliggende produktionsfunktion og de relative faktorpriser. Det vil med andre ord sige, at der i princippet skal bruges de ønskede/optimale omkostningsandele, i stedet for de observerede, og derfor fås fejl svarende til punkt 2 og 3.

Under normale omstændigheder drukner fejlen fra 1 i fejlene fra 2 og 3. Og hvad angår sidstnævnte vil der gælde, at Törnqvistindekset ikke bliver biased pga. disse fejl, og derfor fås der asymptotisk (dvs. med tilstrækkeligt mange observationer) det rigtige resultat, selv når der bruges "forkerte" omkostningsandele.

<uddybes, evt. med Monte Carlo-simulationer>

Litteratur

Diamond/McFadden/Rodriguez (1978): "Measurement of the Elasticity of Factor Substitution and Bias of Technical Change", in Fuss/McFadden (ed.), *Production Economics: A Dual Approach to Theory and Applications*, volume 2, chapter 5, McMaster University Archive for the History of Economic Thought.

R. J. Hill (2006): “Superlative index numbers: not all of them are super”, *Journal of Econometrics*, 2006, vol. 130, issue 1, pages 25-43.

Appendiks A. Hvad foregår egl. inde i Törnqvistindekset?

Man kan opfatte det på den måde, at Törnqvistindekset implicit "estimerer" parametrene i translog-omkostningsfunktionen. Det foregår dog på en lidt speciel måde. Med kun to produktionsfaktorer skal Törnqvist-indekset for hvert par af observationer t–1 og t finde parametrene a_1 og b_{11} og fra to s_1-ligninger, hvilket giver to ligninger med to ubekendte og én kombination af a_1 og b_{11}, som kan replicere de observerede omkostningsandele i de to perioder.

Der er dog det helt specielle, at a_1 og b_{11} "estimeres" år for år: dvs. at disse parametre ikke er konstante over tid "inde i" Törnqvistindekset. Dette bør man således huske, førend man forføres alt for meget af Törnqvist-indeksets (eller andre ideelle indeks) enkelhed. Der gælder med to faktorer og to perioder t–1 og t at:

$$s_1 = a_1 + b_{11}\log(P_1/P_2) \tag{28}$$

$$s_1(-1) = a_1 + b_{11}\log(P_1/P_2)_{-1} \tag{29}$$

Disse ligninger kan løses for a_1 og b_{11}, hvilket giver:

$$b_{11} = \Delta s_1 / \Delta\log(P_1/P_2) \tag{30}$$

$$a_1 = s_1 - \Delta s_1 \log(P_1/P_2)_{-1} \tag{31}$$

Hvis man udregner disse for data fra *KL*-estimationen i TTH 15.01.05 afsnit 5, får man disse parametre:

Tabel A1. Implicitte parametre i Törnqvistindekset

	DLOGP1	DLOGP2	S1	DLOGPT	B11	A1
1970	0.21655	0.12807	0.079623	.	.	.
1971	0.21101	0.15279	0.087891	0.15766	0.14202	-0.00045816
1972	-0.057763	0.089836	0.083101	0.077217	0.032454	0.067702
1973	0.24763	0.20379	0.090457	0.20759	0.16780	0.0034807
1974	-0.077330	0.20826	0.076912	0.18436	0.047429	0.065873
1975	0.018962	0.18900	0.070698	0.17645	0.036544	0.068407
1976	0.097289	0.11332	0.074256	0.11216	-0.22196	0.084617
1977	0.19452	0.11013	0.084185	0.11681	0.11765	0.068764
1978	0.19307	0.094492	0.095013	0.10332	0.10985	0.069786
1979	0.00046249	0.12648	0.091593	0.11472	0.027145	0.088780
1980	0.13840	0.10090	0.098547	0.10447	0.18542	0.072378
1981	0.16789	0.11485	0.10649	0.12029	0.14969	0.077420
1982	0.054811	0.083064	0.10927	0.080016	-0.098464	0.12561
1983	0.020415	0.10087	0.10874	0.092096	0.0065844	0.10818
1984	0.16724	0.073078	0.11929	0.083813	0.11203	0.099164
1985	0.041724	0.067399	0.12223	0.064299	-0.11473	0.13989
1986	0.060037	0.037919	0.12821	0.040689	0.27028	0.080623
1987	0.042283	0.091147	0.12968	0.084846	-0.030172	0.13352
1988	0.00080923	0.048743	0.13122	0.042490	-0.031988	0.13375
1989	-0.0023137	0.062869	0.13166	0.054302	-0.0067343	0.13175
1990	0.17954	0.047816	0.14459	0.066010	0.098175	0.13027
1991	-0.015509	0.055359	0.14467	0.045109	-0.0011052	0.14475
1992	0.048261	0.018488	0.15113	0.022891	0.21709	0.12840
1993	-0.037993	0.032062	0.15126	0.021470	-0.0018523	0.15132
1994	-0.0081083	0.043721	0.15255	0.035848	-0.024815	0.15212
1995	0.045351	0.028183	0.15821	0.030851	0.32990	0.15821
1996	0.0035558	0.048774	0.15992	0.041582	-0.037720	0.15821
1997	-0.018572	0.018150	0.16216	0.012236	-0.061122	0.15715
1998	0.056243	0.032016	0.16827	0.036019	0.25226	0.18283
1999	-0.038980	0.057344	0.16674	0.041209	0.015955	0.16919
2000	0.031486	0.028163	0.17152	0.028725	1.44020	0.38858

Tabellens første fire kolonner viser vækstraten i de to priser, K's omkostningsandel samt væksten i Törnqvistindekset. I tabellens to sidste kolonner vises a_1 og b_{11} for de parvise observationer t–1 og t. Det ses, at a_1 driver noget fra år til år da der ikke er noget trendled, som kan opfange stigningen i K's omkostningsandel. Til gengæld virker b_{11} noget erratisk og antager værdier fra –0.22 (for observationsparret 1975-76) til 1.44 (for observationsparret 1999-2000). Dette er voldsomme bevægelser. Værdien 1.44 er f.eks. udtryk for, at den relative pris næsten ikke ændrer sig mellem 1999 og 2000, mens omkostningsandelen ændrer sig med 0.5 %-point.

Disse parameterbevægelser illustrerer vist meget godt, at Törnqvistindeksets enkelhed har sin pris.

Med tre produktionsfaktorer bliver det først rigtigt kuriøst

Med tre produktionsrfaktorer er den implicitte ”estimation” endnu mere besynderlig, idet der for hvert par af observationer nu er de fem parametre a_1, a_2, b_{11}, b_{12} og b_{22}, men kun fire ligninger, som skal tilfredsstilles (de to omkostningsandele s_1 og s_2 i de to år). Dette indebærer, at der for hvert par af observationer t og t–1 er uendeligt mange kombinationer af a_1, a_2, b_{11}, b_{12} og b_{22}, som kan generere de observerede $s_1(t–1)$, $s_2(t–1)$, $s_1(t)$ og $s_2(t)$.

Dette bekymrer imidlertid ikke Törnqvistindekset, for ligegyldigt hvilken af disse gyldige kombinationer, som vælges, vil Törnqvistindekset give det samme som det ”sande” translogprisindeks! Af den grund er det ikke nødvendigt at identificere alle parametrene endegyldigt. Igen må det dog understreges, at parametrene (eller helt præcist: restriktionerne på disse) ”estimeres” år for år og således ikke er konstante.

Vi vil nu se nærmere på dette fænomen.Vi har to ligninger:

$$s_1 = a_1 + b_{11}\log(P_1/P_3) + b_{12}\log(P_2/P_3) \qquad (32)$$

$$s_2 = a_2 + b_{12}\log(P_1/P_3) + b_{22}\log(P_2/P_3) \qquad (33)$$

Hvis det her antages, at $P_i = 1$ i det første år (t–1), bliver $a_1 = s_1(-1)$ og $a_2 = s_2(-1)$. Der gælder så følgende:

$$\Delta s_1 = b_{11}\log(P_1/P_3) + b_{12}\log(P_2/P_3) \qquad (34)$$

$$\Delta s_2 = b_{12}\log(P_1/P_3) + b_{22}\log(P_2/P_3) \qquad (35)$$

F.eks. kan man nu sætte b_{12} til hvad man ønsker og få de to ligninger til at stemme vha. b_{11} og b_{22}. For hele denne uendelighed af gyldige parameterkombinationer gælder, at de genererer det samme translog-prisindekset (og dermed det samme Törnqvist-indeks). Da b_{ij}'erne styrer de tilsvarende partielle priselasticiteter e_{ij}, vil der altså gælde at hvis man f.eks. ønsker en bestemt e_{12} for to observationer t–1 og t, kan dette opnås – uden at Törnqvistindekset ændres – ved at ”modpostere” på passende måde i e_{11} og e_{22}.

Så fordi man kender Törnqvist-indekset (og dermed translog-prisindekset) år for år, kan man ikke slutte den anden vej til, at man for de parvise observationer t–1 og t endegyldigt har fået afsløret den produktionsfunktion/isokvant, som har genereret disse observationer. Det har man ikke for n>2, fordi der ikke er nok restriktioner på translog-parametrene. Man har snarere fået afsløret en familie af isokvanter, som alle kunne have genereret de to observationer. Det kuriøse er så, at der for alle disse familiemedlemmer gælder, at de genererer det samme Törnqvistindeks!

Appendiks B. Skaleringer i translog-funktionen

Det lønner sig generelt at skalere sine variabler, så $P_i = 1$,Y = 1 og $t = 0$ i et givet basisår, da mange af parametrene derved bliver lettere at fortolke (når man skalerer P_i på den måde, skal man naturligvis huske at modskalere X_i, så faktorudgifterne $P_i\ X_i$ er uforandrede).

Men for at undgå misforståelser skal det understreges, at translog-omkostningsfunktionen (som i øvrigt også CES-funktionen og alle andre konsistente omkostnings- og produktionsfunktioner) er skalerings-invariant, dvs. at man kan skalere sine variabler som man vil og alligevel ende med fuldstændigt samme elasticiteter, modelegenskaber osv.

For at skabe lidt klarhed over dette, vil vi i det følgende se på, hvad der sker med de estimerede translog-parametrene, hvis P_i eller Y omskaleres med en faktor 2, eller hvis t rykkes én periode frem. Skaleringseffekterne er her kun vist i tilfældet med konstant skalaafkast.

Der estimeres en translog-omkostningsfunktion for K og L i *nm*-erhvervet, og nedenfor ses parametre i udgangssituationen, givet $P_i = 1$,Y = 1 og $t = 0$ i 1995. Der vises dels parametre i translog-standardudgaven (TL1) og dels i en udgave med effektivitetsindeks (TL2), jf. også afsnit 4. Vedrørende disse estimationer henvises til TTH 15.01.06 s. 15 og 17 for detaljer.

Parameter	Estimate	Error	t-statistic	P-value
A0	10.8416	.010372	1045.31	[.000]
A1	.157331	.168388E-02	93.4334	[.000]
B11	.043960	.636110E-02	6.91073	[.000]
AT	-.024180	.204471E-02	-11.8258	[.000]
BT1	.423367E-02	.153506E-03	27.5798	[.000]
ATT	.560329E-03	.189787E-03	2.95241	[.003]

Parameter	Estimate	Error	t-statistic	P-value
OMEGA2	.039333	.271051E-02	14.5111	[.000]
OMEGA_BAR	-.152594E-03	.193496E-03	-.788620	[.430]
OMEGA1	-.056975	.994385E-02	-5.72968	[.000]
A0	10.8416	.010372	1045.31	[.000]
A1	.157331	.168388E-02	93.4334	[.000]
B11	.043960	.636110E-02	6.91073	[.000]

En pris omskaleres

$P_1 = 2 \cdot P_1$ (og $X_1 = X_1/2$)

TL1:

Parameter	Estimate	Error	t-statistic	P-value
A0	**10.7431**	**.010426**	**1030.37**	**[.000]**
A1	**.126860**	**.433809E-02**	**29.2433**	**[.000]**
B11	.043960	.636112E-02	6.91071	[.000]
AT	**-.027115**	**.204330E-02**	**-13.2701**	**[.000]**
BT1	.423367E-02	.153506E-03	27.5798	[.000]
ATT	.560330E-03	.189787E-03	2.95242	[.003]

TL2:

Parameter	Estimate	Error	t-statistic	P-value
OMEGA2	.039333	.271051E-02	14.5111	[.000]
OMEGA_BAR	-.152595E-03	.193496E-03	-.788623	[.430]
OMEGA1	-.056975	.994389E-02	-5.72966	[.000]
A0	**10.7431**	**.010426**	**1030.37**	**[.000]**
A1	**.126860**	**.433809E-02**	**29.2433**	**[.000]**
B11	.043960	.636112E-02	6.91071	[.000]

I TL1 ses det at a_0, a_1 og a_t ændres, mens det kun er a_0 og a_1 som ændres i TL2. Det sidste skyldes, at ω'erne kun ganges på tiden t, i modsætning til a_t, som ganges på $t \cdot \log(P_i)$. Man kan undre sig over, at a_t ændres i TL1, for den ganges kun på t i omkostningsfunktionen. Forklaringen skal søges i produktivitsvækstraten $rtp = -\mathrm{dlog}(C)/\mathrm{d}t$, som også må kræves uforandret. Denne er givet som

$$rtp = -\left(a_t + a_{tt} t + \sum_i b_{ti} \log(P_i) \right) \tag{36}$$

Da bt_1 ikke ændrer sig og P_1 er blevet fordoblet, har det sidste led ændret sig med en absolut størrelse, som a_t så opfanger. Det skal her huskes, at a_t kun kan fortolkes som produktivitesvækstraten i et givet basisår, hvis der gælder at $t = 0$ og $P_i = 1$ i dette år.[13]

[13] En anden måde at indse det på er at betragte TTH 15.01.06 formel (1.28). I denne ændrer a_1 sig, mens ω'erne ikke ændrer sig (jf. TL2-parametrene), hvilket forklarer ændringen i venstresiden (a_t).

Produktionen omskaleres

$Y = 2 \cdot Y$

TL1:

Parameter	Estimate	Error	t-statistic	P-value
A0	**10.1485**	**.010372**	**978.483**	**[.000]**
A1	.157331	.168388E-02	93.4334	[.000]
B11	.043960	.636110E-02	6.91073	[.000]
AT	-.024180	.204471E-02	-11.8258	[.000]
BT1	.423367E-02	.153506E-03	27.5798	[.000]
ATT	.560329E-03	.189787E-03	2.95241	[.003]

TL2:

Parameter	Estimate	Error	t-statistic	P-value
OMEGA2	.039333	.271051E-02	14.5111	[.000]
OMEGA_BAR	-.152594E-03	.193496E-03	-.788620	[.430]
OMEGA1	-.056975	.994385E-02	-5.72968	[.000]
A0	**10.1485**	**.010372**	**978.483**	**[.000]**
A1	.157331	.168388E-02	93.4334	[.000]
B11	.043960	.636110E-02	6.91073	[.000]

Denne er nem, da a_0-parameteren kan opfange hele omskaleringen. Dette hænger selvfølgelig nøje sammen med antagelsen om konstant skalaafkast.

Tidsindekset omskaleres

$t = t + 10$

TL1:

Parameter	Estimate	Error	t-statistic	P-value
A0	**11.1114**	**.010168**	**1092.80**	**[.000]**
A1	**.114994**	**.121213E-02**	**94.8697**	**[.000]**
B11	.043960	.636110E-02	6.91073	[.000]
AT	**-.029784**	**.758428E-03**	**-39.2703**	**[.000]**
BT1	.423367E-02	.153506E-03	27.5798	[.000]
ATT	.560329E-03	.189787E-03	2.95241	[.003]

TL2:

Parameter	Estimate	Error	t-statistic	P-value
OMEGA2	**.040858**	**.158778E-02**	**25.7331**	**[.000]**
OMEGA_BAR	-.152594E-03	.193496E-03	-.788620	[.430]
OMEGA1	**-.055449**	**.010148**	**-5.46425**	**[.000]**
A0	**11.1114**	**.010168**	**1092.80**	**[.000]**
A1	**.114994**	**.121213E-02**	**94.8697**	**[.000]**
B11	.043960	.636110E-02	6.91073	[.000]

I TL1 ændres a_0, a_1 og a_t. Det kan måske undre, at det kun er denne trendparameter som ændres, mens trendparametrene bt_1 og a_{tt} er uforandrede. Lidt nærstudium forklarer det dog. At bt_1 ikke kan ændre sig skyldes, at man ellers ville få en anden trend i omkostningsandelene (det er i stedet a_1, som giver sig dér). At a_{tt} er uforandret skyldes tilsvarende, at man ellers ville få en anden trend i produktivitetsvæksten *rtp* (det er i stedet a_t, som giver sig dér).

I TL2 ændrer a_0 og a_1 sig også, samt trendparametrene ω_1 og ω_2. Begrundelsen for det sidste er, at effektivitetsvækstraterne er nødt til at være uforandrede, og disse er givet som

$$\frac{\mathrm{dlog}(e_i)}{\mathrm{d}t} = \omega_i + \bar{\omega} t$$

Når t ændres til $t + 10$ er $\bar{\varpi}$ nødt til at være uforandret, hvis der skal være den samme vækstrate i effektivitetsindeksene. I stedet opfanges t-ændringen af ω_1 og ω_2, så $\mathrm{dlog}(e_i)/\mathrm{d}t$ ender med at være uforandret.