

## Modellering af de private pensioner

### Resumé:

*Nærværende papir illustrerer pensionsformuens ligninger og foreslår at inddrage kohorter i modelleringen. Det vil øge mængden af data og antallet af variable, men brugen af kohorter kan fx gøre det nemmere at modellere op- og nedbygning af pensionsordninger. De nuværende ligninger fokuserer mere på steady state end på tilpasningen til steady state, fx tilpasningen når en skatteomlægning ændrer fordelingen på ordningerne, eller tilpasningen når fremskrivningens afkastrate er mindre end den historiske.*

*ADAM's pensionsordninger og -formuer er opdelt på kategorierne rate- eller kapitalpension, obligatorisk eller frivillig, og fx ATP-ordningen er udskilt for sig. Papiret viser, at der er brug for at harmonisere pensionsordningernes rentefølsomhed, og notens forfatter er ikke ansvarsfri.*

---

Nøgleord: Pensionsformue

*Modelgruppepapirer er interne arbejdsrapporter. De konklusioner, der drages i papirerne, er ikke endelige og kan være ændret inden opstillingen af nye modelversioner. Det henstilles derfor, at der kun citeres fra modelgruppepapirerne efter aftale med Danmarks Statistik.*

### 1. ADAMs bestemmelse af pensionsformuen

I en pensionsordning afspejler udviklingen i pensionstagernes formue indbetaling, afkast og udbetaling. Det gælder altid at:

ændringen i pensionsformuen = indbetaling plus afkast efter skat minus udbetaling.

Hvis afkast og udbetaling er konstante andele af pensionsformuen, og indbetalingen vokser med en konstant rate, vil forholdet mellem pensionsformue og indbetaling konvergere mod et bestemt tal. Denne sammenhæng er kernen i ADAM's pensionsligninger, og den kan vises ved at indsætte modellens variable i ovenstående verbale identitet for pensionsformuens ændring.

$$\Delta W_p = T_p + T_{ip} + O_{wp} - S_{ywp} - T_{yp} \quad (1)$$

$W_p$  pensionsformue,  $T_p$  indbetaling,  $T_{ip}$  rente- og udbytteafkast  $O_{wp}$  omvurdering,  $S_{ywp}$  pensionsafkastskat,  $T_{yp}$  udbetaling til ordningens pensionister.

Man kan dividere igennem med den laggede pensionsformue og isolere forholdet mellem indbetaling og pensionsformue på venstre side:

$$\frac{T_p}{W_{p(-1)}} = \frac{\Delta W_p}{W_{p(-1)}} - \frac{T_{ip} + O_{wp} - S_{ywp}}{W_{p(-1)}} + \frac{T_{yp}}{W_{p(-1)}}$$

Kald den langsigtede nominelle vækstrate  $g$  og tag reciprok værdi på begge sider:

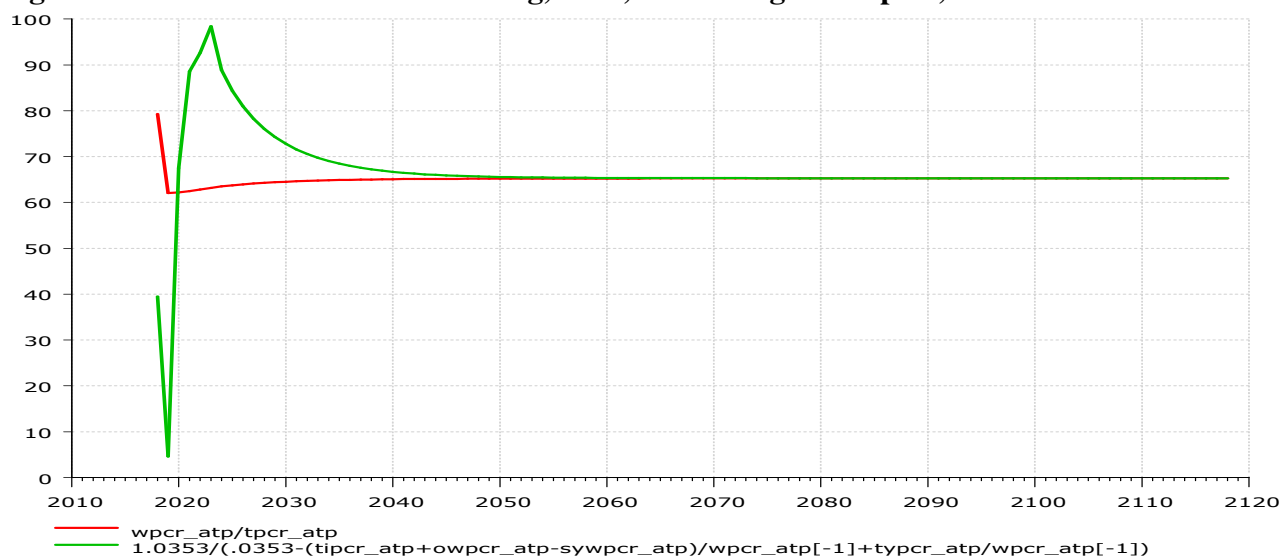
$$\frac{W_p}{T_p} = \frac{1+g}{g - \frac{T_{ip} + O_{wp} - S_{ywp}}{W_{p(-1)}} + \frac{T_{yp}}{W_{p(-1)}}} \quad (1a)$$

Både vækstraten  $g$  og de to brøker i den store brøks nævner er konstante i steady state. Så (1a) viser, at formuen  $W_p$  på sigt vokser i takt med indbetalingen  $T_p$ .

### 2. En illustration, fremskrivning af ATP-pensionen

I ADAM er pensionsvariablene delt op efter nogle få principper.  $F_x$  er der særlige variable for ATP-ordningen, og disse variable er udover et ATP-suffiks tilføjet et  $c_r$ , fordi ATP-ordningen er kollektiv (collective) med ratepension. Venstre og højre side i ligning (1a) med ATP-specifik notation er vist i figur 1, hvor  $g$  er sat til 3.53 pct., som afspejler den sædvanlige antagelse om 1,5 pct. realvækst og 2 pct. inflation i modellens grundforløb.

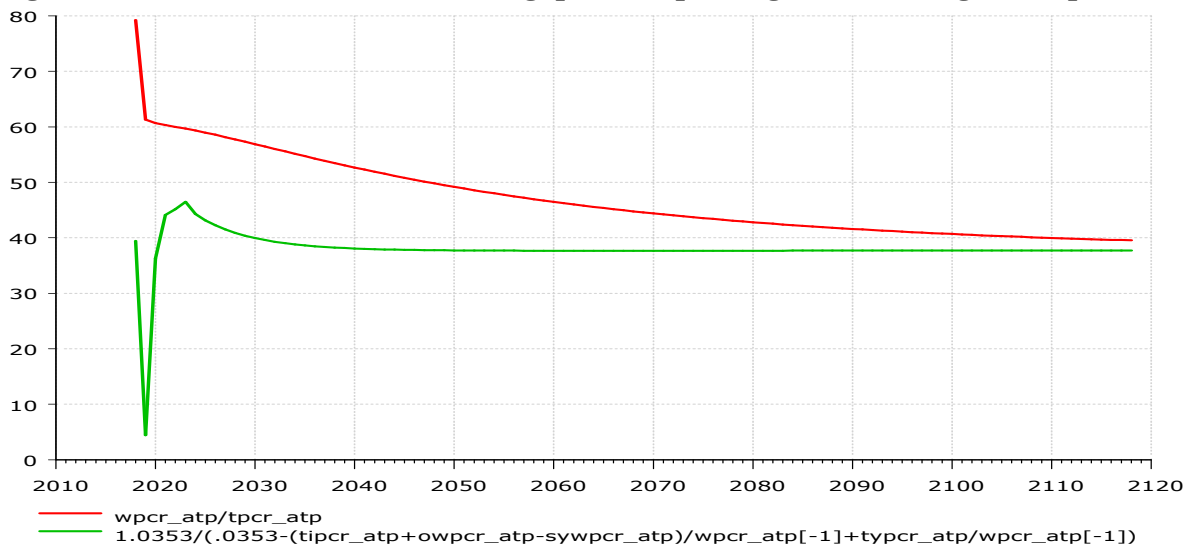
**Fig. 1. Pensionsformue over indbetaling, ATP, udbetalingskvote på 0,0133556**



Figur 1 understreger, at (1a) er en langsigtrelation. Til en begyndelse er der tydelig forskel på forholdet pensionsformue over indbetaling og det venstreside-udtryk, som ender med at angive forholdets langsigtede ligevægt. På 30 års sigt er forskellen reelt forsvundet, og de to kurver ligger oven i hinanden i resten af det lange grundforløb.

Det ser lovende ud, at den faktiske pensionsformue på den måde tilpasser sig den ønskede formue indenfor en generation på arbejdsmarkedet. Der er imidlertid ikke tale om en frit valgt udbetalingskvote. Udbetalingskvoten er via forsøg sat på et bestemt niveau (0,0133556) fra grundforløbets start, og forsøgene har tilstræbt at lægge figur 1's røde og grønne kurve oven i hinanden hurtigst muligt. I praksis kan man imidlertid ikke vælge udbetalingsniveau ud fra et sådan kriterium. Man er nødt til at tage udgangspunkt i demografi og pensionskasseregler, og med det udgangspunkt bestemme et udbetalingsforløb.

De godt 1,3 pct. som årlig udbetalingskvote er i øvrigt et lavt tal, som implicerer, at ATP-medlemmerne venter urealistisk længe på at få deres pension. Normalt sættes ATP's udbetalingskvote til 2,5 pct. i hele grundforløbet. Gør man det, opstår et langvarigt gab mellem faktisk og langsigtet pensionsformue/indbetaling, jf. figur 2.

**Fig. 2. Pensionsformue over indbetaling, passiv tilpasning til udbetalingskvote på 0,025**

Ligevægtsudtrykket angiver, at den faktiske pensionsformue skal falde, så den svarer til 37,7 gange indbetalingen til pensionsordningen, og tilpasningen til den langsigtede pension/indbetaling-kvote bør ikke være længere end udskiftningen af den nuværende generation på arbejdsmarkedet. Så i ovenstående figur 2, går der urealistisk mange år, før pensionsformuen når i ligevægt, og i figur 1 er udbetalingskvoten urealistisk lille.

Det illustrerer, at ADAM's pensionsformler tager for lidt hensyn til demografien. Udbetalingerne bør knyttes mere konkret til de bagved liggende kohorter.

### 3. Et skitseret alternativ til ADAM's udbetalingsligning

I bevægelsesligningen for en pensionsordnings formue  $W_p$  antages det i ADAM, at både renteafkast  $T_p$ , omvurdering  $O_{wp}$ , afkastskat  $Sy_{wp}$  og udbetaling  $T_{yp}$  enten er eller hurtigt bliver til faste kvoter gange lagget formue. Så formuens bevægelsesligning kan skrives:

$$\Delta W_p = T_p + r W_p(-1) - t_y W_p(-1) \quad (1b)$$

Hvor  $r$  repræsenterer den samlede prædeterminerede afkastrate (rente, udbytte og omvurdering) efter skat, og  $t_y$  er en eksogen eller prædetermineret udbetalingskvote.

Indbetalingen  $T_p$  afspejler pensionsordningens regler og indbetalingsgrundlaget, og man sikrer en uændret afkastrate i fremskrivninger ved at fastholde pensionsformuens fordeling på værdipapirer. Vi vil nu finde et udtryk for udbetalingen  $T_{yp}$ .

Til den ende vil vi være mere specifikke omkring pensionsformuen og søger derfor en anden og mere specifik ligning for pensionsformuen end (1b). Udgangspunktet er stadig de årlige indbetalinger  $T_p$ , der i steady state vokser med den generelle værdistigning  $g$  i ADAM. Desuden antages det, at pensionsordningens medlemmer sparer op i ordningen i et fast antal år, fx 40 år. Der er ikke brugt konkret kohortestatistik, men pensionsordningens medlemmer antages jævnt fordelt mellem to yderpunkter: Folk, som står umiddelbart før pensionering, og folk, der lige er begyndt at spare op til pensionen.

De kommende pensionisters samlede indbetaling i et bestemt år,  $T_p$ , vil 30 år senere være vokset pga. afkastet og repræsentere en værdi på  $T_p(-30)*(1+r)^{30}$ . Den gamle indbetalings værdi og vægt i pensionsformuen vil imidlertid være reduceret af 30 års udbetalinger. Efter et år udbetales  $1/40$  af indbetalingen, så for hver kroners indbetaling er der efter et år  $(39/40)*(1+r)$  tilbage, efter to år er der  $(38/40)*(1+r)^2$  tilbage osv.

For konstant afkastrate  $r$  vil en  $j$  år gammel indbetaling være blevet til en pensionsformue på:

$T_p(-j) (40 - j)/40 * (1 + r)^j$ , og ordningens samlede pensionsformue  $W_p$  kan i et stiliseret steady state forløb skrives som:

$$W_p = \sum_{j=0}^{39} T_p(-j)((40 - j)/40)(1 + r)^j \quad (2)$$

Hvor den laggede indbetaling svarer til den ulaggede diskonteret med den nominelle vækstrate  $g$ :  $T_p(-j) = T_p(1 + g)^{-j}$ .

Indsættes i  $W_p$ -ligningen, bliver  $W_p$  en funktion af samme års indbetaling og den vækstkorrigerede afkastrate i steady state, jf. ligning (2a)

$$W_p = T_p \sum_{j=0}^{39} ((40 - j)/40)((1 + r)/(1 + g))^j \quad (2a)$$

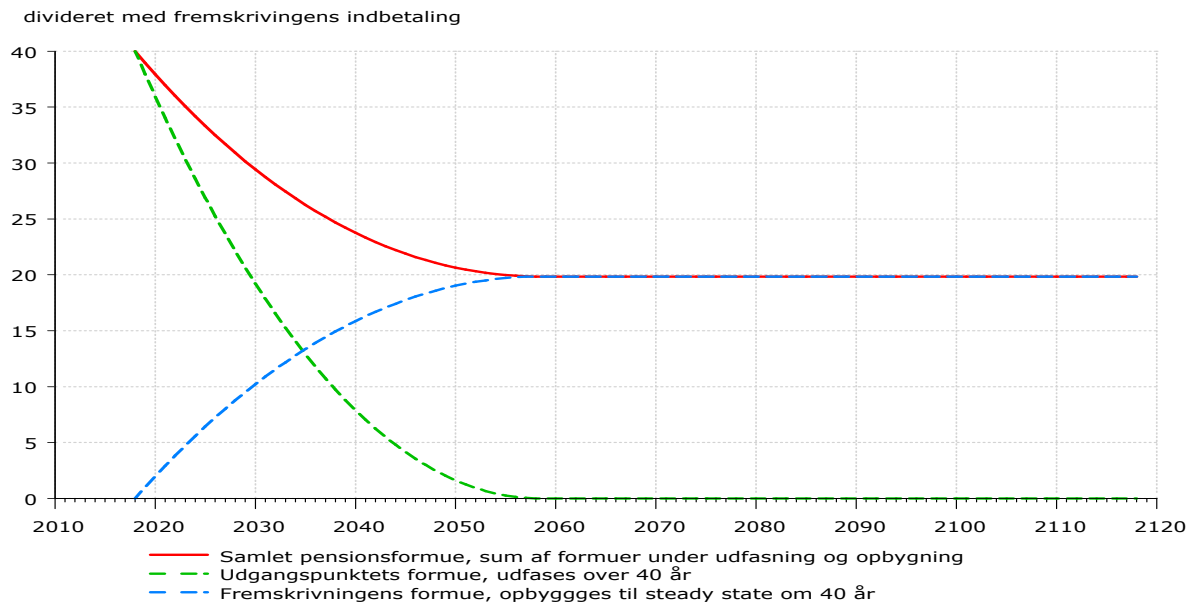
I ADAMs grundforløb er vækstraten  $g$  0,0353, og fx ATP'ordningens afkastrate efter skat  $r$  er 0,03271.<sup>1</sup> Med disse oplysninger kan man vha. ovenstående ligning (2a) beregne forholdet mellem pensionsformue og indbetaling i steady state. Det fås, at formuen  $W_p$  vil svare til knap 20 (19,9402) gange den prædeterminerede indbetalingsvariabel  $T_p$ . At faktoren er tæt på 20 passer med, at indbetalingerne afskrives lineært over 40 år, og at det vækstkorrigerede afkast er tæt på nul.

Givet steady-state formuen, kan bevægelsesligningen i (1b) bruges til at beregne steady state udbetalingskvoten. Den bliver 0,04957 ( $=1,0353/19,9402+0,03271-0,0353$ ).

Det er svært at fremskrive formuen med udgangspunkt i formueligningen i (2a). Fx forudsætter (2a), at afkastrate og værdistigning har været konstante i 40 år. Det kan man roligt regne med, at de ikke har været. Så man kan ikke uden videre anvende (2a) til fx at beskrive faldet fra en høj formue ved starten af en fremskrivning til en lavere steady-state formue, der opstår i løbet af fremskrivningen. Man er nødt til at behandle udgangspunktets pensionsformue og den i fremskrivningen opbyggede pensionsformue forskelligt.

Den i fremskrivningen opbyggede formue kan beskrives med en ligning, der svarer til (2a) men med de historiske indbetalinger sat til nul. Udgangspunktets formue kan fremskrives med fremskrivningens afkastrate og en antagelse om, at udgangspunktets formueejere bliver 1 år ældre om året, og den yngste årgang forlader arbejdsmarkedet efter 40 år. Når "de gamle" er væk følger den samlede pensionsformue ligning (2a), jf. figur 3, hvor den røde kurve angiver forløbet i den samlede pensionsformue.

<sup>1</sup> Afkastraten afspejler formuens fordeling på danske aktier, udenlandske aktier og obligationer.

**Figur 3: Det fremskrevne forløb i pensionsformuen**

Den røde kurve er en sum af den grønne og blå stiplede med hhv. udgangspunktets pensionsformue og den i fremskrivningen opbyggede pensionsformue. Vi kalder den samlede eller totale pensionsformue  $W_{pt}$  (rød kurve), udgangspunktets formue for  $W_{pu}$  (grøn kurve) og fremskrivningens formue for  $W_{pf}$  (blå kurve).

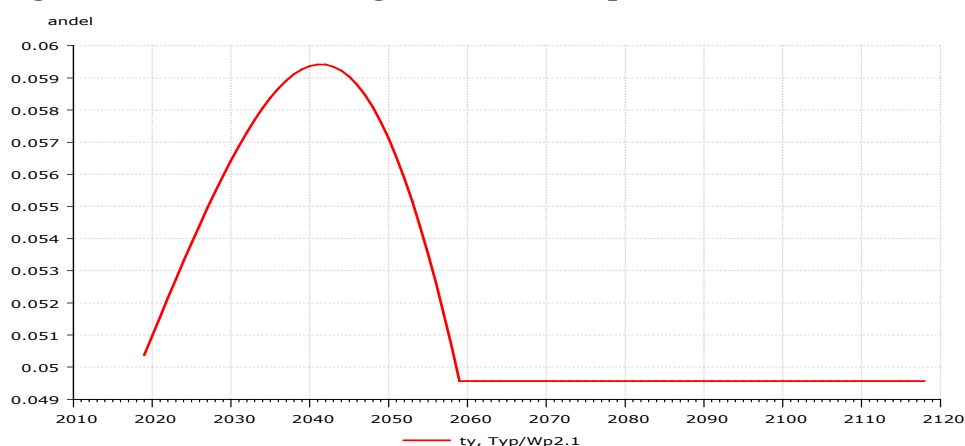
De to delformuer  $W_{pu}$  og  $W_{pf}$  beregnes hver for sig. Den til  $W_{pt}$  hørende udbetalingskvote  $ty$  kan beregnes ved at indsætte  $W_{pt}$  i den generelle bevægelsesligning (1b):

$$dif(W_{pt}) = Tp + r W_{pt}(-1) - ty W_{pt}(-1)$$

Ligningen implicerer, at udbetalingskvoten  $ty$  (også kaldet udbetalingsraten) altid svarer til indbetalingen over lagget pensionsformue ("indbetalingsraten") plus afkastraten minus den relative stigning i pensionsformuen:

$$ty = \frac{Tp}{W_{pt}(-1)} + r - \frac{dif(W_{pt})}{W_{pt}(-1)}, \text{ og i steady state: } ty = \frac{(1+g) \cdot Tp}{W_{pt}} + r - g$$

Udbetalingskvoten  $ty$  er i regneeksemplet konstant (0,0493) fra og med slutningen af 2050'erne, hvor ligning (2a) er gået i steady state. Den beregnede udbetalingskvote  $ty$  er i figur 4 vist for hele fremskrivningsperioden.

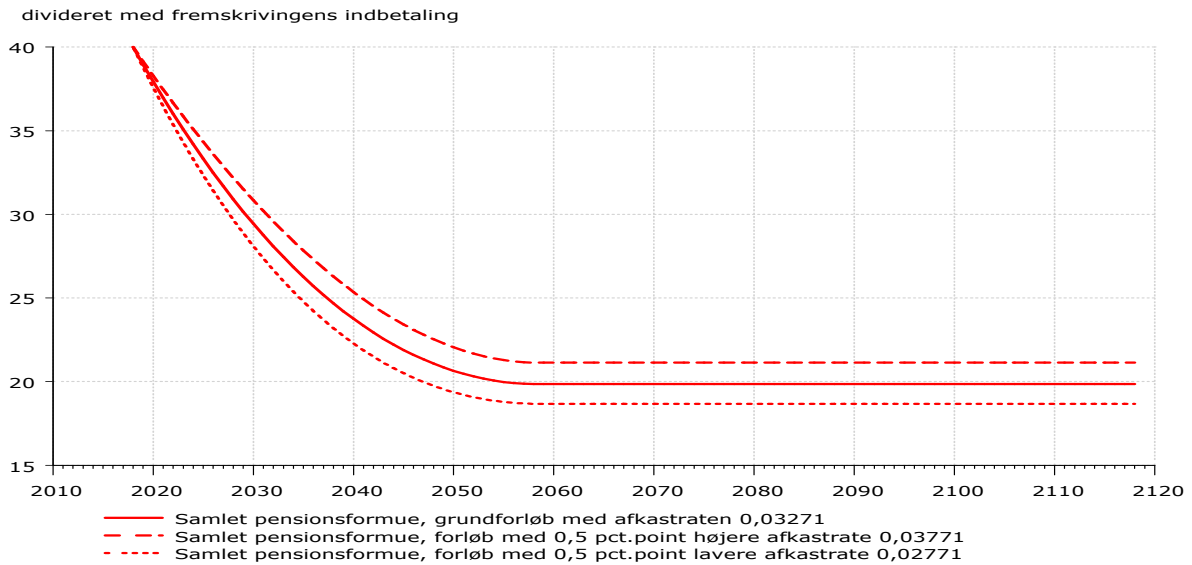
**Figur 4: Pensionsudbetalingen som andel af pensionsformuen**

Det fremgår, at der er brug for en høj udbetalingskvote, mens udgangspunktets høje pensionsformue  $W_{pu}$  udbetales til de pensionistkohorter, som har en ejerandel i udgangspunktets formue. Vha. udbetalingskvoten i figur 4 kan man få ADAM's enkle bevægelsesligning (1b) til at beskrive den samlede pensionsformue  $W_{pt}$  i hele fremskrivningsforløbet. Ligningens udbetalingskvote bliver konstant, når pensionsordningen når sin steady state.

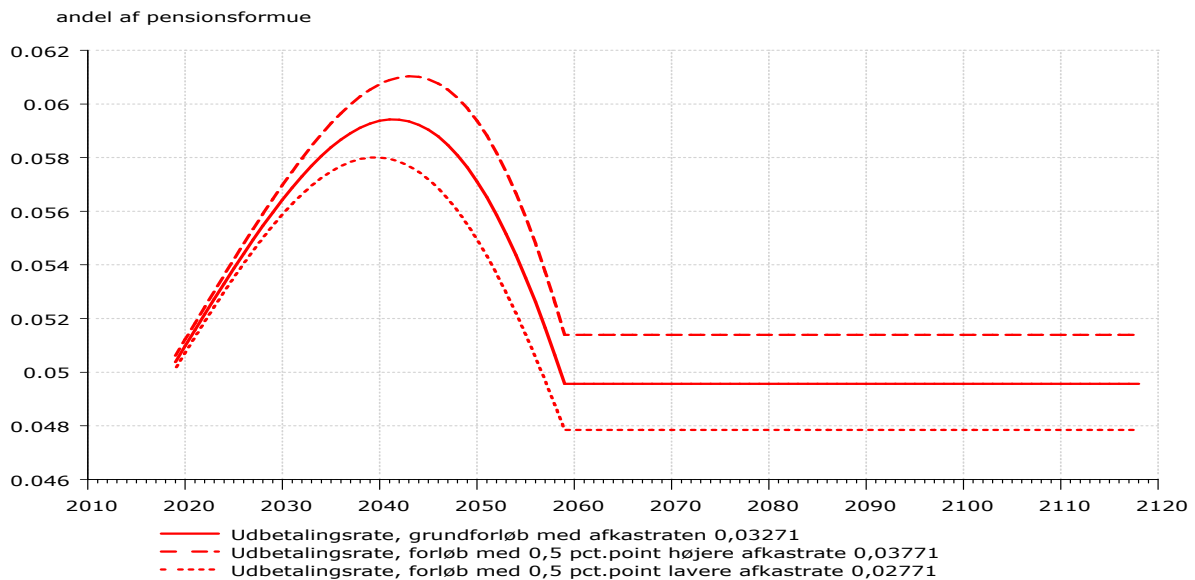
Udbetalingskvoten afspejler i høj grad pensionsordningens udformning, men kvoten påvirkes også af fremskrivningens afkastrate. Man kan illustrere afkastratens betydning ved at indsætte en anden afkastrate i den netop beskrevne beregning af pensionsformuen og dens udbetalingskvote. Nærmere bestemt skal udgangspunktets formue nedbygges mod nul med den ændrede afkastrate indsat i beregningen, og fremskrivningens pensionsformue skal opbygges med den ændrede afkastrate indsat i beregningen.

Hvis afkastraten fx forøges med  $\frac{1}{2}$  procentpoint fra 0,03271 til 0,03771 fås både en større pensionsformue og en større udbetalingskvote, jf. figur 5 og 6. I steady state er formuen  $W_{pt}$  forøget med 6,5 pct., fra 19,94 til 21,24 gange den uændrede indbetaling. Udbetalingskvoten  $\tau$  er i steady state forøget med 3,7 pct., og da kvoten ganges på den større formue, stiger den udbetalte pension  $T_{yp}$  med 10,46 procent. Reduceres afkastraten fra 0,03271 til 0,02771 bliver både formue og udbetalingskvote mindre.

**Figur 5: Samlet pensionsformue, følsomhed mht. afkastraten**



**Figur 6: Udbetalingskvote, følsomhed mht. afkastraten**

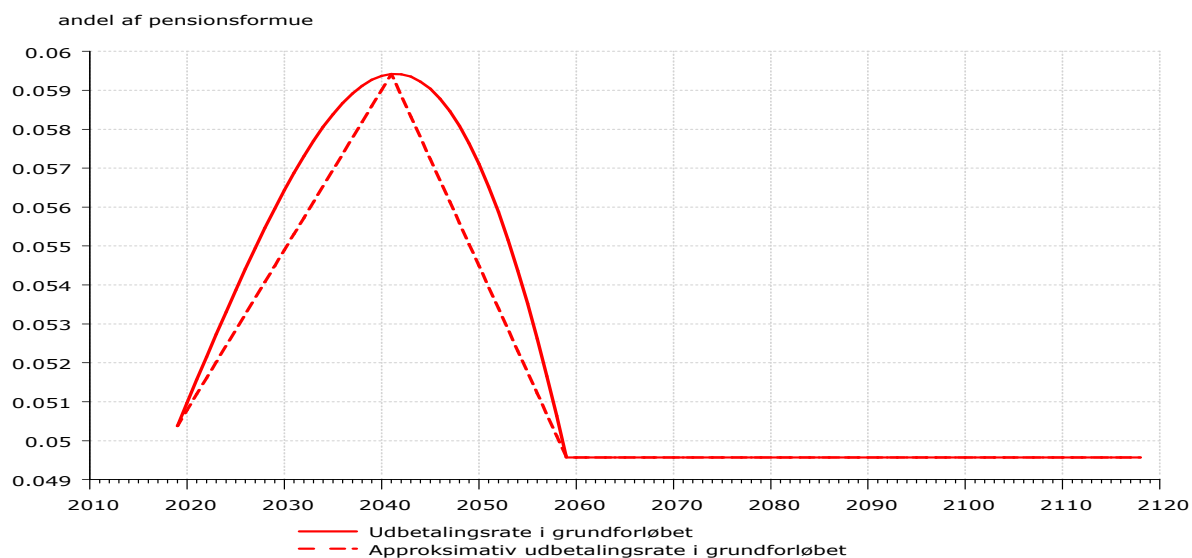


Hvis den i figur 6 viste udbetalingskvote fra grundforløbet indsættes i pensionsformuens generelle bevægelsesligning (1b), vil ligningen som sagt (gen)beregne grundforløbets



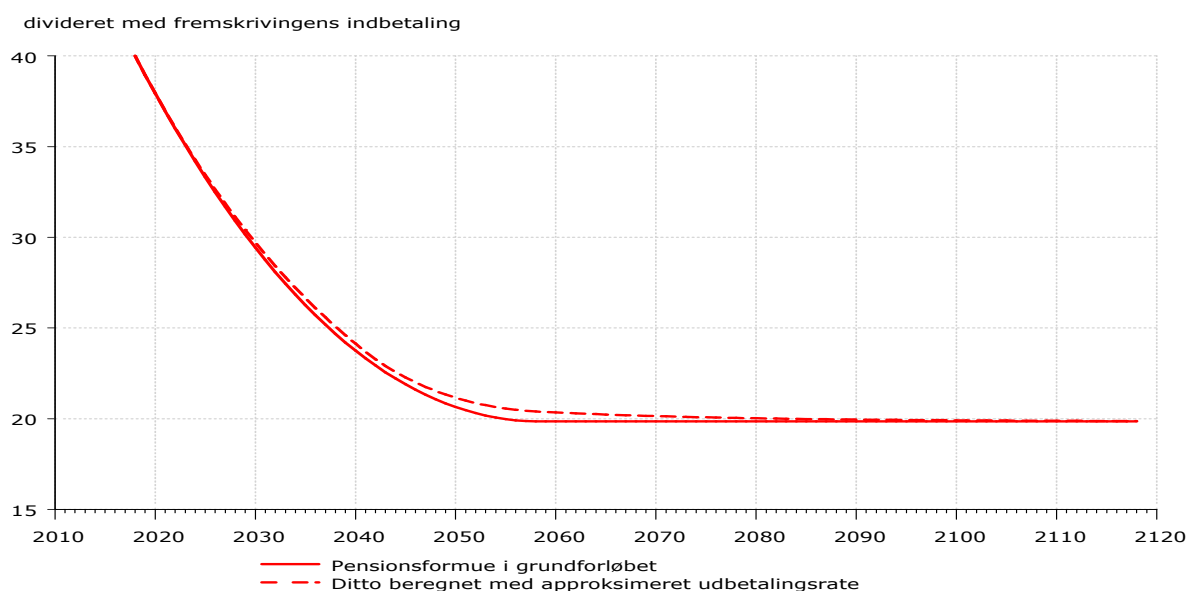
pensionsformue. Indsættes i stedet den i figur 7 viste "lineære" approksimation til grundforløbets udbetalingskvote, fremkommer den forholdsvis pæne approksimation til grundforløbets pensionsformue i figur 8.

**Figur 7: Grundforløbets udbetalingskvote og en approksimation**



Figur 7 og 8 eksemplificerer, at bare den anvendte udbetalingskvote minder lidt om den korrekte, behøver afstanden til den korrekte formue ikke være lige så stor og langvarig, som den fx er blevet i den tidligere viste figur 2, hvor den langsigtede steady-state udbetalingskvote er anvendt i hele fremskrivningen af forholdet  $W_{pcr\_atp}/T_{pcr\_atp}$ .

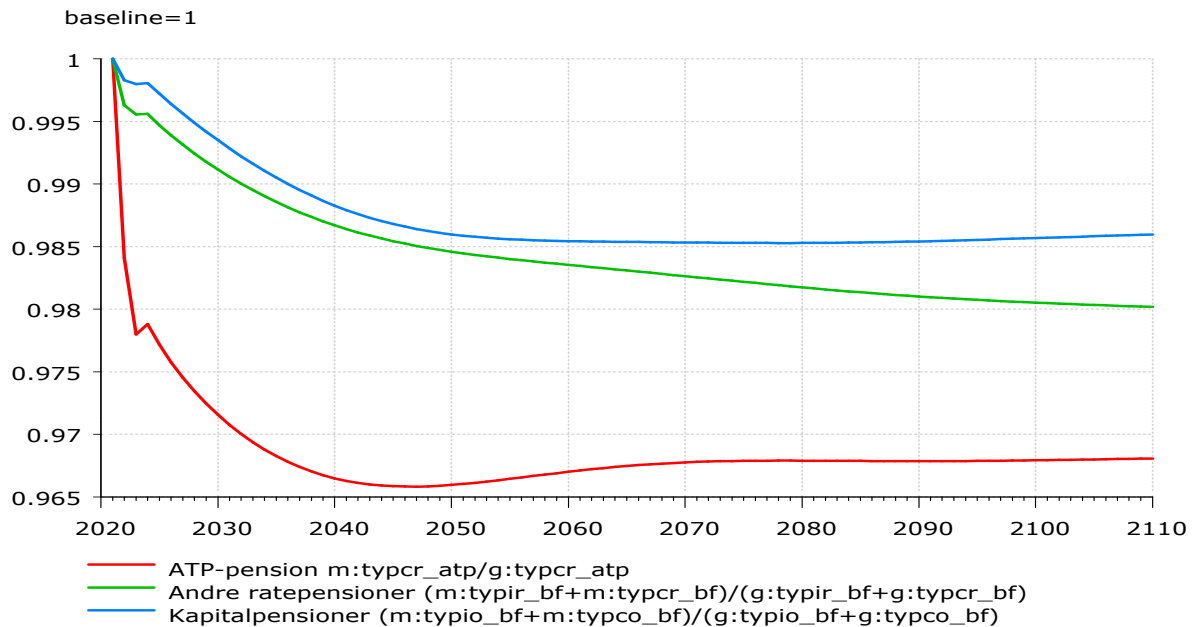
**Figur 8: Grundforløbets pensionsformue og en approksimation**



#### 4. Om pensionsudbetalingens rentefølsomhed

Ved et nyligt standardeksperiment på ADAM med 0,1 pct. lavere rente permanent blev det bemærket, at pensionsydelsen fra ATP reagerer hurtigere og kraftigere på en renteændring end andre pensioner, jf. figur 9.

**Figur 9: Reaktion i pensionsydelse, rente 0,1 pct. point ned**



Anm.: Kurverne i figur 9 til 11 angiver forholdet mellem variable i multiplikator- og grundbank (m og g). I multiplikatorbanken er renten reduceret 0,1 pct. point, og bundskatten ændret, så den offentlige saldo på sigt er konstant ift. BNP.

Især kan det undre, at den relative effekt på ATP-pensionen er så meget kraftigere end effekten på andre ratepensioner. Der bruges fx samme koefficienter i de Taylor-ligninger, som kvantificerer rentens effekt på udbetalingskvoten. Jf. en sammenstilling af udbetalingskvote-ligningen for ATP med en ditto for ratepensioner, her de bankrelaterede ratepensioner med suffiks b.

$$\text{FRML\_G\_} \quad \text{btypcr\_atp} = \text{btypcr\_atp} + 1.44 * (\text{iwp\_bf} - \text{iwpe\_bf}) * (1 - \text{tsywp}) + \text{JbTypcr\_atp}$$

$$\text{FRML\_G\_} \quad \text{btypcr\_b} = \text{btypcr\_b} + 1.44 * (\text{iwp\_b} - \text{iwpe\_b}) * (1 - \text{tsywp}) + \text{JbTypcr\_b}$$

Man bemærker, at der er brugt to forskellige afkastrater,  $\text{iwp\_bf}$  og  $\text{iwp\_b}$ . Det kan afspejle, at afkastet i ATP afviger fra afkastet i de bank-relaterede ordninger, fordi sammensætningen på aktier og obligationer afviger. Det bemærkes yderligere, at afkastraten  $\text{iwp\_bf}$ , som dækker både bank- og forsikrings-pensionskasse-relaterede ordninger inkl. ATP, omfatter den underliggende aktiekursændring (bowsx'erne), mens den bankrelaterede afkastrate  $\text{iwp\_b}$  kun omfatter rente og udbytte, jf. nedenstående ligninger.

$$\text{iwp\_bf} = (\text{kiwp\_bf} * (\text{Tip\_cf\_z} + (\text{Wpse\_atp} * \text{bowsx}) / (1 + \text{bowsx}) + (\text{Wpsdk\_atp} * \text{bowsdx}) / (1 + \text{bowsdx}) + \text{Wp\_f} / \text{Wpx\_f} * ((\text{Wpse\_f} * \text{bowsx}) / (1 + \text{bowsx}) + (\text{Wpsdk\_f} * \text{bowsdx}) / (1 + \text{bowsdx})))) / \text{Wp\_cf\_x}[-1]$$

$$\text{iwp\_b} = \text{Tip\_b} / \text{Wpx\_b}[-1]$$

$\text{iwp\_bf}$  afkastrate inkl. aktiekursgevinsttrend, livs- og pensionsforsikring inkl. ATP

$\text{iwp\_b}$  afkastrate ex aktiekursgevinst, bankrelaterede pensionsordninger

Tip angiver rente- plus udbytteafkast

Det virker uheldigt med en sådan definitions-mæssig forskel, som må undskyldes med, at pensionsligningernes afkastrater har to opgaver: 1) at bestemme strømmen af rente og udbytte til Tip-variablene, og 2) at bestemme udbetalingskvoten. Til formål 1) skal man ikke inddrage kursgevinster, men det skal man til 2), for den underliggende kursstigning på aktierne øger den resulterende pensionsudbetaling på samme måde som det årlige rente- og udbytteafkast.

Så i forhold til ligningerne for udbetalingskvoten er  $iwp\_b$ 's definition for snæver. I forhold til udfordringen i figur 9, så er aktiekursen eksogen i den bagvedliggende modelberegning, og faldet i ATP-ligningens afkastrate  $iwp\_bf$  er konkret lidt mindre end faldet i  $iwp\_b$ . Så forskellen på de to afkastraters reaktion kan ikke forklare, at ATP-pensionen falder mere end de andre private rate-pensioner i figur 9.

Forskellen på de relative pensionsfald i figur 9 afspejler især, at udbetalingskvoten  $btypcr\_b$  er meget større end ATP-kvoten  $btypcr\_atp$ , 0,4 mod 0,025. Så trods de ensartede formler for de to udbetalingskvoter betyder den samme afkastændring i pct. point mere i pct. for  $btypcr\_atp$  end for  $btypcr\_b$ .

Det er ikke sådan, at de bankrelaterede ratepensionsordninger udbetaler hele 40 pct. af formuen hvert år. Den simple udbetalingskvote fra bankernes ratepensionsordninger,  $Typcr\_b/Wpcr\_b(-1)$ , er klart mindre end  $btypcr\_b$ . Det fremgår af udtrykket for den tilhørende pensionsudbetaling i kroner,  $Typcr\_b$ .

$$Typcr\_b = btypcr\_b * (Wpcr\_b[-1] - 0.5 * Owpcr\_b[-1]) * [iwpd\_b / (1 - (1 + iwpd\_b)^{-nhl})]$$

Eksponenten  $nhl$  er gennemsnitlig forventet restlevetid for personer over 64 år, og brøken i den firkantede parentes,  $iwpd\_b / (1 - (1 + iwpd\_b)^{-nhl})$ , er en annuitetsfaktor, der spreder pensionstagernes samlede pension udover den nævnte restlevetid på knap 13 år. Annuitetsfaktoren har en værdi på knap 0.09 i fremskrivningen, og faktoren optræder ikke i den tilsvarende ligning for ATP-pensionen:

$$Typcr\_atp = btypcr\_atp * (Wpcr\_atp[-1] - 0.5 * Owpcr\_atp[-1])$$

Heraf følger, at ADAM-kvoterne  $btypcr\_b$  og  $btypcr\_atp$  har helt forskellige niveauer.<sup>2</sup> Desuden kunne den ekstra rentefølsomhed, der følger af at have annuitetsfaktoren i  $Typcr\_b$ -ligningen, i princippet opveje, at kvoten  $btypcr\_b$  reagerer klart trægere end  $btypcr\_atp$  i de respektive Taylorligninger. Men så meget betyder annuitetsfaktorens reaktion åbenbart ikke.

<sup>2</sup> De skal også tolkes forskelligt. ATP-ordningens kvote  $btypcr\_atp$  beskriver det pågældende års udbetalte pension. De bankrelaterede ratepensioners  $btypcr\_b$  beskriver den samlede pension over hele livet til de pensionstagere, som får udbetalt en årsportion på  $Typcr\_b$ . ATP-ordningens  $btypcr\_atp$  på 0,025 i fremskrivningen kan sammenlignes med de øvrige ratepensioners  $Typcr\_b / ((Wpcr\_b(1) - 0.5 * Owpcr\_b(-1)))$ , der har en ædruelig størrelse omkring 0,035.

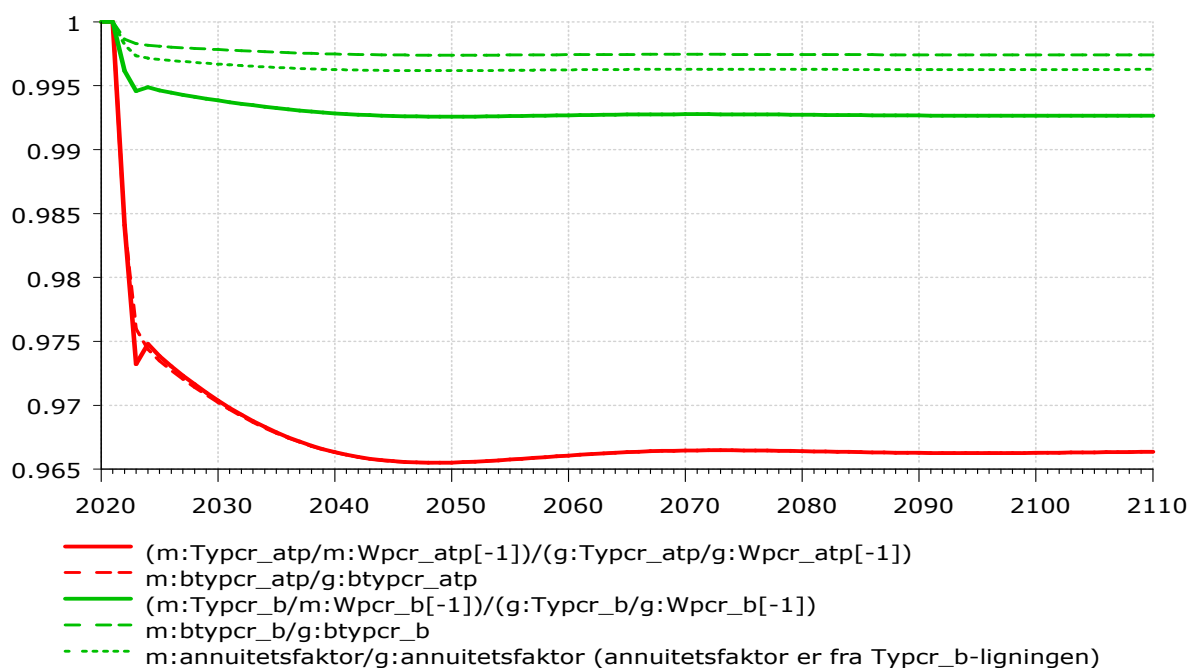
Vi ignorerer den lille ADAM-krølle med at holde halvdelen af sidste års kursændring ude af pensionsgrundlaget og skriver de to ratepensioners udbetaling som en kvote af pensionsformuen:

$$\text{Typcr\_atp}/\text{Wpcr\_atp}[-1] = \text{btypcr\_atp}$$

$$\text{Typcr\_b}/\text{Wpcr\_b}[-1] = \text{btypcr\_b} * [\text{iwpd\_b}/(1-(1+\text{iwpd\_b})^{**(-\text{nhl}))}]$$

Det kan nu illustreres, hvor meget et rentestød på minus 0,1 pct. point til ADAM får de to ligningers højresider, herunder annuitetsfaktoren til at reagere, jf. figur 10.

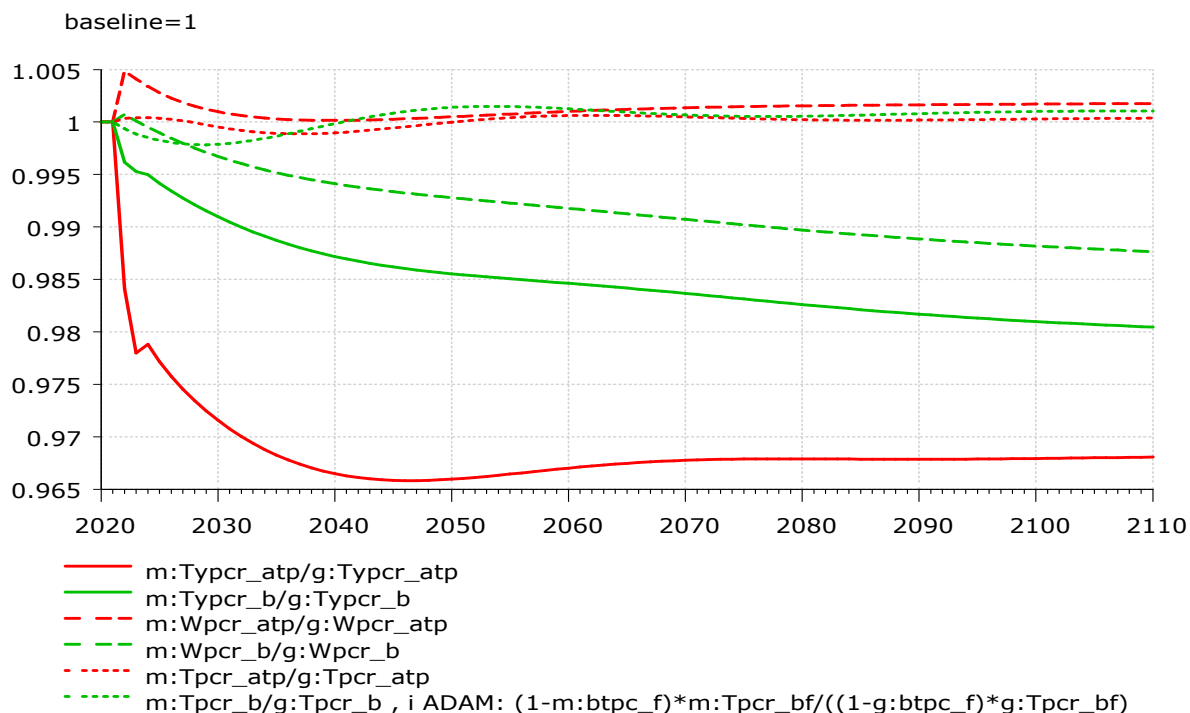
**Figur 10: Reaktion i ratepensionernes udbetalingskvoter, rente 0,1 pct. point ned**  
baseline=1



De røde linjer vedrører ATP-pension, og de grønne vedrører den bankrelaterede del af anden ratepension. Det fremgår, at den simple pensionskvote  $\text{Typ}/\text{Wp}(-1)$  for ATP-ordningen falder i takt med ADAM-kvoten  $\text{btypcr\_atp}$ , der som nævnt er bestemt af en Taylorligning i afkastraten.<sup>3</sup> For den bankrelaterede ratepension afspejler faldet i den simple pensionskvote både faldet i ADAM-kvoten  $\text{btypcr\_b}$  og faldet i annuitetsfaktoren, jf. figur 10. Det resulterende procentvise fald i  $\text{Typcr\_b}/\text{Wpcr\_b}(-1)$  er imidlertid tydeligt mindre end faldet i  $\text{Typcr\_atp}/\text{Wpcr\_atp}(-1)$ .

Man kan spørge, om den store rentefølsomhed i ATP-pensionen er mere rigtig end den beskedne rentefølsomhed i de andre ratepensioner. I forhold til ADAM-beregningen må svaret omfatte en vurdering af de to ordningers centrale variable, jf. figur 11.

<sup>3</sup> Den lille afvigelse mellem de to røde kurver i begyndelse af fremskrivningsperioden afspejler, at kvotevariablen  $\text{btypcr\_atp}$  har en nævner, der er eksklusiv seneste års omvurdering.

**Figur 11: Reaktion i udbetaling, formue og indbetaling, rente 0,1 pct. point ned**

De røde kurver relaterer til ATP-ordningen, de grønne til andre ratepensioner (bankrelaterede). De fuldt optrukne kurver viser reaktionen i den udbetalte pension (Typ), de stiplede viser reaktionen i pensionsformuen (Wp), og de punkterede viser reaktionen i indbetalingen til pensionsordningerne (Tp).

Indbetalingerne er jf. de punkterede kurver næsten tilbage på baseline på langt sigt, især ATP-indbetalingen. Det afspejler at renteændringen, her med finanspolitisk reaktion, ikke flytter det store billede og indkomstgrundlag på langt sigt. Så ADAM-beregningen burde minde om nærværende papirs regneeksempel på pensionsligninger for given indbetaling.

Pensionsudbetaling og -formue (fuldt optrukne og stiplede kurver) bør på langt sigt forløbe parallelt med og under baseline, når renten er sat ned. Karakteristikken parallel passer bedst på ATP-ordningens Typ- og Wp-kurve. Den bankrelaterede ratepensions grønne Typ- og Wp-kurve drifter nedad i hele fremskrivningen, hvilket godt kan afspejle, at udbetalingen ikke er sat langt nok ned af Taylorligningen og annuitetsfaktorens reaktion. Til gengæld kan den lille steady-state stigning i ATP-formuen tyde på, at ATP's pensionsudbetaling er sat lidt for meget ned.

Næste afsnit diskuterer, hvordan ratepensioner kan behandles, og hvor rentefølsomme de er.

## 5. Ratepension

Man kan opfatte en ratepension som en kapitalpension plus en udbetalingsordning. Den enlige pensionsudbetaling er blevet til en overførsel til en udbetalingsordning, der transformerer engangsudbetalingen til en række årlige udbetalinger. Det kunne fx være til 15 årlige betalinger, der ikke er lige store men stiger over tid med grundforløbets nominelle

vækstrate  $g$ . De årlige udbetalinger afspejler, hvor meget pensionsformue, der er opsamlet i den grundlæggende pensionsordning og overført til udbetalingsordningen. Desuden påvirkes de årlige udbetalinger af pensionsformuens forrentning.

Man kan til illustration udvide regneeksemplet i afsnit 3 med en 15-årig udbetalingsordning, hvortil den løbende udbetaling af den samlede pensionsformue  $W_{pt}$  overføres.

For årets kohorte af nyslåede pensionister kan det første af de 15 årlige pensionsbeløb,  $T_1$ , bestemmes som en annuitetsfaktor gange kohortens overførsel  $Ov$  til udbetalingsordningen:

$$T_1 = \alpha_{15,r-g}^{-1} Ov$$

Hvor alfastørrelsen er en 15 årig annuitetsfaktor med fremskrivningens vækstkorrigerede afkastrate som rentefod.<sup>4</sup> Betalingen  $T_1$  er første udbetaling til denne gruppe nye pensionister. Samme år kommer anden udbetaling til den gruppe, der blev pensioneret året før:

$$T_2 = \alpha_{15,r-g}^{-1} Ov(-1) (1 + g)$$

Det er antaget, at de årlige udbetalinger til en kohorte vokser med fremskrivningens vækstrate  $g$  i forhold til foregående års udbetaling. Årets samlede udbetaling  $Typ$  til alle pensionister (15 kohorter) består af første udbetaling til årets nye pensionister plus anden udbetaling til de nye pensionister fra året før plus 3. udbetaling til de nye pensionister fra 2 år før osv. plus 15. udbetaling til de nye pensionister fra 14 år før. Årets samlede udbetaling til pensionisterne,  $Typ$ , er en sum af  $T_1$  til  $T_{15}$ , og samtidig er  $Typ$  en funktion af årets overførsel  $Ov$  fra den grundlæggende pensionsordning og af den vækstkorrigerede afkastrate  $r-g$ :

$$Typ = T_1 + \dots + T_{15} = \alpha_{15,r-g}^{-1} \sum_{j=0}^{14} Ov(-j) (1 + g)^j = \alpha_{15,r-g}^{-1} 15 Ov$$

Det sidste lighedstegn udnytter, at størrelsen med sumtegn svarer til femten gange årets overførsel  $Ov$ , fordi en lagget overførsel,  $Ov(-1)$ , er vækstraten  $g$  mindre end den ulaggede. Bemærk, at hvis den vækstkorrigerede afkastrate er nul, svarer  $\alpha_{15,r-g}^{-1}$  til  $1/15$ , og den udbetalte ratepension  $Typ$  svarer til årets overførsel  $Ov$  til udbetalingsordningen, fordi regneeksemplets kohorter er antaget lige store.

Med grundforløbets lille vækstkorrigerede afkastrate på minus 0,00250 (=1,03271/1,0353-1), får  $\alpha_{15,r-g}^{-1}$  størrelsen  $1/15,26604$ , som er lidt mindre end  $1/15$ . Indsættes i  $Typ$ -ligningen, fås, at udbetalingen  $Typ$  svarer til 0,98257 gange indbetalingen  $Ov$  til udbetalingsordningen.

Den beskrevne pensionsudbetaling  $Typ$  optræder også i bevægelsesligningen for den formue, der ligger i udbetalingsordningen. Ordningens formue kaldes  $W_{pub}$ , og dens bevægelsesligning er:

$$dif(W_{pub}) = Ov + r * W_{pub}(-1) - Typ$$

Ligningen implicer, at formuen i steady state kan udtrykkes som:

<sup>4</sup> Faktoren  $\alpha_{15,r-g}^{-1}$  svarer til  $\frac{r-g}{1-(1+r-g)^{-15}}$ , hvor "r minus g" repræsenterer den vækstkorrigerede afkastrate,  $(1+r)/(1+g)-1$ . Den ikke-inverterede alfastørrelse  $\alpha_{15,r-g}$  angiver nutidsværdien af 15 årlige betalinger, der hvert år vokser med  $g$  og tilbagediskonteres med  $r$ . Sættes første års betaling til 1 krone svarer  $\alpha_{15,r-g}$  til:  $\alpha_{15,r-g} = 1 + ((1+r)/(1+g))^{-1} + ((1+r)/(1+g))^{-2} + \dots + ((1+r)/(1+g))^{-14} = \frac{1-((1+r)/(1+g))^{-15}}{1-((1+r)/(1+g))^{-1}}$  eller  $\frac{1-(1+r-g)^{-15}}{r-g}$ , hvor  $r-g$  repræsenterer den vækstkorrigerede afkastrate.

$$W_{\text{pub}} = \frac{Ov(1+g) - T_{\text{yp}}(1+g)}{g-r}$$

På højre side er vækstraten  $g$  og det vækstkorrigerede realafkast kendte størrelser, og både overførslen  $Ov$  til udbetalingsordningen og den udbetalte pension  $T_{\text{yp}}$  er i steady-state en konstant gange indbetalingen  $T_{\text{p}}$ . Indsættes der i  $W_{\text{pub}}$ 's bevægelsesligning, fås udbetalingsordningens formue  $W_{\text{pub}}$  som en faktor gange  $T_{\text{p}}$ :  $(0,95034 * T_{\text{p}} * 1.0353 - 0,98257 * 0,95034 * T_{\text{p}} * 1.0353) / 0,00250 = 6,85966 * T_{\text{p}}$ .

Hvis den vækstkorrigerede afkaststrate,  $r$  minus  $g$ , er præcis nul, har det anvendte udtryk for  $W_{\text{pub}}$  ingen løsning. For i det tilfælde er udtrykkets nævner nul, og det samme er tælleren, hvor tilgangen  $Ov$  vil svare til afgangens  $T_{\text{yp}}$ . Manglen på steady-state løsning til bevægelsesligningen afspejler, at hvis formuetilgangen pr. konstruktion svarer til afgangens, skal formuen ikke have et specielt niveau for at være i steady state.

Hvis den vækstkorrigerede rente er nul, kan udbetalingsordningens steady-state formue i stedet findes med samme type ræsonnement, som ligger bag afsnit 3's pensionsformueudtryk i ligning (2): Af årets overførsel  $Ov$  til udbetalingsordningen udbetales  $1/15$ , så der tilbagestår  $14/15 * Ov$ . Af foregående års  $Ov$  tilbagestår et beløb på  $13/15 * Ov$  osv. Af udbetalingen 14 år før tilbagestår  $1/15 * Ov$ . Udbetalingsordningens formue bliver:

$$W_{\text{pub}} = (14 + 13 + \dots + 1) / 15 * Ov = 7 * Ov$$

Så hvis den vækstkorrigerede rente er præcis nul, svarer udbetalingsordningens formue til 7 gange den årlige overførsel. Og den i regneeksemplet fundne faktor på 6,85966 er tæt på 7, fordi regneeksemplets vækstkorrigerede rente er tæt på nul.

Den samlede formue i pensionsordningen er i regneeksemplet summen af  $W_{\text{pt}}$  og  $W_{\text{pub}}$  med grundforløbets størrelser indsat dvs.  $19,8489 * T_{\text{p}} + 6,85966 * T_{\text{p}}$ , i alt 26,70856 gange  $T_{\text{p}}$ . Udbetalingen  $T_{\text{yp}}$  til pensionisterne kan ligeledes udtrykkes som en faktor gange indbetalingen  $T_{\text{p}}$ , nærmere bestemt som 0,93378 gange  $T_{\text{p}}$ . For udbetalingen  $T_{\text{yp}}$  er udledt til at være  $0,98257 * Ov$ , og overførslen  $Ov$  er udledt til  $0,95034 * T_{\text{p}}$ .

Dermed er steady-state udbetalingskvoten  $T_{\text{yp}} / (W_{\text{pt}}(-1) + W_{\text{pub}}(-1))$  lig  $0,93378 / (26,70856 / 1,0353)$  eller 0,03620 som decimalbrøk.

Hvis den netop beregnede udbetalingskvote bruges i ADAMs pensionsligning, skal den korrigeres lidt op (med ca.  $\frac{1}{2}$  pct.), for ADAM's udbetalingskvote ganges ikke på hele pensionsformuen kun på pensionsformuen minus halvdelen af årets omvurdering. Da pensionsformuens aktier stiger i kurs gennem hele fremskrivningen, er der hvert år en positiv omvurdering at tage hensyn til.

Det gennemgående regneeksempel om steady-state effekten af 0,5 pct. point højere rente kan jf. boksen afrundes med, at overførslen  $Ov$  til ratepensionens udbetalingsordning stiger 10,46 pct. (svarer til rentens effekt på den grundlæggende kapitalpension), den udbetalte ratepension  $T_{\text{yp}}$  stiger 14,28 pct., udbetalingsordningens formue  $W_{\text{pub}}$  stiger 12,17 pct., og på den samlede pensionsformue  $W_{\text{pub}} + W_{\text{pt}}$  stiger 7,94 pct.

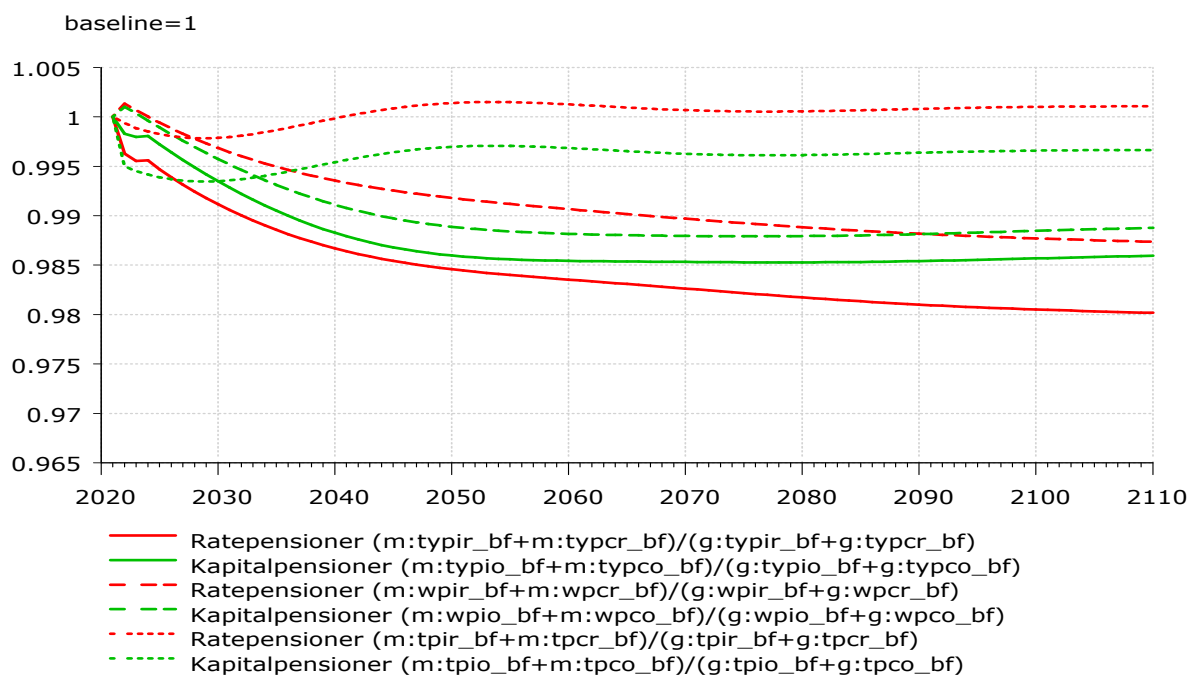
De anførte effekter af en rentestigning på  $\frac{1}{2}$  pct. point kan omregnes til effekter af et rentefald på 0,1 pct. point, hvorved de bliver sammenlignelige med rentestødet til ADAM. De omregnede effekter er vist i tabel 1.

Tabel 1: Stileret beregning på effekten af at nedsætte renten 0,1 pct. point rente, uændret indbetaling til ordning	
Ydelse og formue:	Baseline=1
Kapitalpensionsydelse, Typ eller Ov <sup>5</sup>	0,980
Kapitalpensionsformue, Wpt	0,987
Ratepension, Typ	0,974
Ratepensionsformue, Wpt+Wpub	0,985
Udbetalingskvote:	pct.
Kapitalpensionens, Typ/Wpt(-1)	4,96
Ratepensionens, Typ/(Wpt(-1)+Wpub(-1))	3,62

Ratepensionen er i ovenstående tabel lidt mere rentefølsom end kapitalpensionen, fordi regneeksemplet formulerer ratepensionen som regneeksemplets kapitalpension plus en udbetalingsordning. Derved får ratepensionen den længste bindingsperiode.

Tabel 1's renteeffekt på pensionsydelse og -formue kan fx sammenlignes med nedenstående figur 12, der illustrerer effekten af et rentestød til ADAM på modellens ratepensioner ex ATP, og kapitalpensioner ex LD. ATP-pensionens forholdsvis store rentefølsomhed fremgår af den tidligere viste figur 11.

**Figur 12: Reaktion i udbetaling, formue og indbetaling, rente 0,1 pct. point ned**



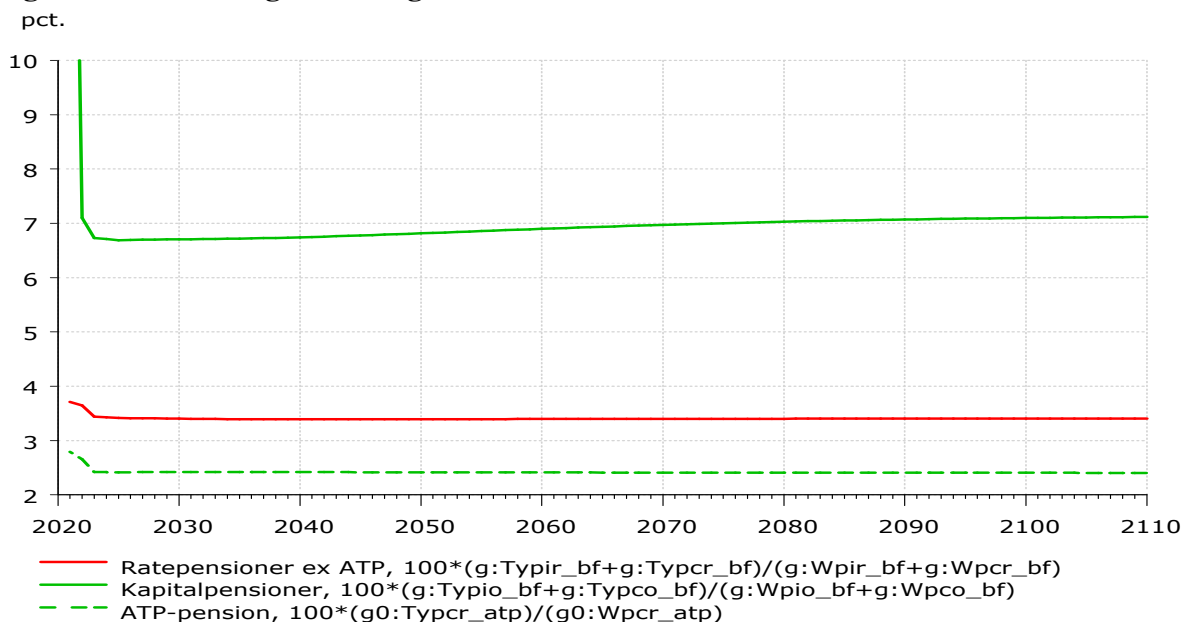
Overordnet passer størrelsesordenen i tabel 1 med figur 12, der illustrerer et rentestød på minus 0,1 pct. point til ADAM. Der er dog lidt forskel. Fx falder indbetalingen til kapitalpension i ADAM-beregningen nogle promille ift. baseline, og det er en forskel til det regneeksempel, som tabel 1 gengiver. Desuden ser det ud til, at ADAM's kapitalpension er tættere på at finde en steady state end ratepensionen, hvis formue og ydelse drifter nedad.

<sup>5</sup> Hvis kapitalpensionsordningen ses som del af en ratepension, opfattes kapitalpensionens engangsydelse som overførsel (Ov) til en udbetalingsordning, der fordeler den på rater.



Figur 13 viser pensionsordningernes udbetalingskvoter i ADAM's grundforløb. Den røde kurve for ADAM's ratepensioner ligger på sigt tæt på de ca. 3½ pct., som fremgår af tabel 1 papirets regneeksempel. Derimod har ADAM's kapitalpensioner en udbetalingskvote på noget over 5 pct. og dermed en kortere varighed end regneeksemplets kapitalpension.

**Figur 13: Udbetalingskvoter i grundforløb**



## 6. Konklusion

De opstillede regneeksempler illustrerer bl.a., at man kan opnå en væsentlig hurtigere tilpasning i pensionsformuerne, hvis pensionsordningernes medlemmer inddrages som kohorter i beregningen af ordningernes udbetaling.